1. а) (1 балл) Пусть H — линейное пространство, $F\colon H \to \mathbb{C}$ — линейный функционал (линейное отображение, если вдруг не было слова “функционал”) , $\operatorname{Ker} F = \{x \in H\colon F(x) = 0\}$. Докажите, что для любого вектора $x_0 \notin N$ линейная оболочка $\operatorname{Lin}(x_0, N)$ совпадает со всем пространством H.

б) (1 балл) Если есть другой такой линейный функционал $\Phi\colon H \to \mathbb{C}$, что $\Phi(x) = 0$ при всех $x \in N$, то существует такая константа $c \in \mathbb{C}$, что $\Phi = cF$.

в) (1 балл) Пусть H — гильбертово пространство. Докажите, что для любого линейного функционала $F\colon H \to \mathbb{C}$, для которого верно $\sup_{\|x\|=1} |F(x)| < +\infty$, существует такой единственный вектор $\ell \in H$, что $F(x) = (x, \ell)$, где $(\cdot,\cdot)$ обозначает скалярное произведение в H.

г) (1 балл) Докажите, что для линейного функционала F и вектора ℓ, определённых в пункте в) верно, что $\sup_{\|x\|=1} |F(x)| = \|\ell\|$.

2. (2 балла) Пусть последовательность $\{f_n\}$ функций, аналитических в области D, равномерно на любом компакте $K \subset D$ сходится к функции $f \not\equiv const$. Тогда, если $f(z_0) = 0$, $z_0 \in D$, то в любой окрестности точки z_0, лежащей в области D, все функции f_n, начиная с некоторого n, также обращаются в ноль.

3. (1 балл) Вычислить интеграл

$$\int_0^3 \frac{dx}{(x+2)^2 \sqrt[4]{x^3(3-x)}}.$$

4. (2 балла) Вычислить интеграл

$$\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2(2-x)}}.$$

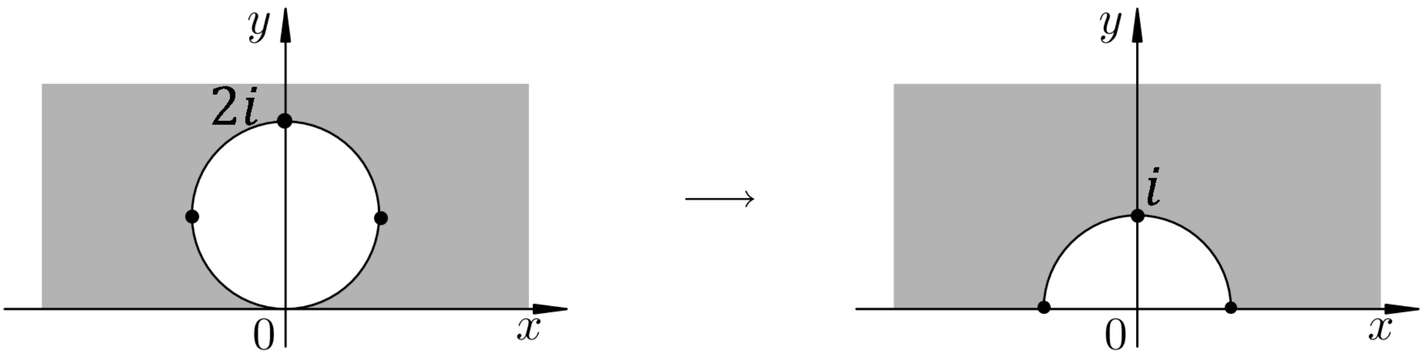
5. (1 балл) Докажите, что

$$\frac{\pi}{\sqrt{z}\sin(\pi\sqrt{z})} = \frac{1}{z} + 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{z-n^2}.$$

6. (2 балла) Пусть $a > 0$, найдите сумму (ответ должен быть записан без многоточия)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n^2+a^2)^2}.$$

7. а) (1 балл) Постройте конформное взаимно однозначное отображение области “начало заката солнца” на область “солнце наполовину село”.



б) (1 балл) Постройте такое конформное отображение области “начало заката солнца” на область “солнце наполовину село”, при котором отмеченные жирным точки просто опускаются на i, не меняя порядка.