Биномиальные коэффициенты.

19 февраля 2017 г.

1. (1 балл) Доказать следующую формулу:

   $$|A \cap B \cap C| = |A| + |B| + |C| - |A \cup B| - |A \cup C| - |B \cup C| + |A \cup B \cup C|.$$

2. (2 балла) Доказать комбинаторно так называемую формулу суммирования по диагонали

   $$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}. \tag{1}$$

3. (1,5 балла) Доказать, используя комбинаторные рассуждения, что для всех целых $n \geq m \geq k \geq 0$ справедливо равенство

   $$\binom{n}{m} \cdot \binom{m}{k} = \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m-k}.$$

   С его помощью доказать справедливость равенства

   $$\sum_{k=0}^{m} \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{m-k} = 2^m \binom{n}{m}.$$

4. (1 балл) Доказать комбинаторно следующее рекуррентное соотношение для количества k-сочетаний с повторениями:

   $$\left(\!\binom{n}{k}\!\right) = \left(\!\binom{n-1}{k}\!\right) + \left(\!\binom{n}{k-1}\!\right), \qquad n, k = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

   $$\left(\!\binom{n}{1}\!\right) = \binom{n}{1} = n; \qquad \left(\!\binom{1}{k}\!\right) = \binom{k}{k} = 1.$$

5. (1 балл) Дать комбинаторную интерпретацию равенства

$$\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}.$$

6. (1,5 балла) С помощью правила суммы доказать тождество

$$\sum_{i=1}^{n-1} i \cdot (n-i) = \binom{n+1}{3}.$$

7. (2 балла) Доказать комбинаторно следующее тождество:

$$\left(\!\!\binom{n+1}{k}\!\!\right) = \sum_{i=0}^{k} \left(\!\!\binom{n}{k-i}\!\!\right).$$

   С его помощью доказать справедливость равенства

$$\binom{n+k}{n+1} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n+k-i-1}{n}.$$

8. (1,5 балла) Используя формулу суммирования по верхнему индексу, получить замкнутые выражения для сумм вида

$$\sum_{i=0}^{k} i, \qquad \sum_{i=0}^{k} i^2, \qquad \sum_{i=0}^{k} i^3.$$

9. (2 балла) Доказать обобщенное правило суммы для произвольного количества n множеств:

   $|A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n| = \sum\limits_{i=1}^{n} |A_i| - \sum\limits_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum\limits_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k|$ $- \ldots + (-1)^{n-1} |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$.

10. (1 балл) Рота состоит из трех офицеров, шести сержантов и шестидесяти рядовых. Сколько существует различных способов сформировать отряд, состоящий из одного офицера, двух сержантов и двадцати рядовых?

11. (2 балла) Докажите, что $(1+x)^n + (1-x)^n \le 2^n$ при $n \ge 1$ и$|x| \le 1$.