Курс: Функциональное программирование
Практика 2. Рекурсия и редукция

Разминка

▶ Эквивалентны ли термы:

$$\lambda x.\, x$$
$$\lambda y.\, y$$
$$\lambda x y.\, x y$$

▶ Найдите WHNF и NF для

$$\boldsymbol{\omega}\ 2$$
$$\boldsymbol{\omega}\ 3$$
$$\boldsymbol{\omega}\ n$$

Напоминание: $\boldsymbol{\omega} \equiv \lambda x.\, x\, x$.

Каррирование

Если функция двух аргументов задана в традиционном стиле $\mathtt{f}\,(\mathtt{pair}\ x\ y)$ (на паре, т.е. декартовом произведении), то перейти к стандартной записи можно *каррированием*:

$$\mathtt{curry} \ = \ \lambda\, f\, x\, y.\, f\,(\mathtt{pair}\ x\ y)$$

▶ Реализуйте обратную процедуру, `uncurry`.

Функция предшествования для чисел Чёрча

Вспомогательные функции

$$\begin{aligned}\mathtt{zp} &\equiv \mathtt{pair}\ 0\ 0\\ \mathtt{sp} &\equiv \lambda p.\, \mathtt{pair}\ (\mathtt{snd}\ p)\ (\mathtt{succ}\ (\mathtt{snd}\ p))\end{aligned}$$

Вторая работает так

$$\mathtt{sp}\ (\mathtt{pair}\ \mathtt{i}\ \mathtt{j}) \ = \ \mathtt{pair}\ \mathtt{j}\ (\mathtt{j}+1)$$

$$\begin{aligned}\mathtt{sp}^0\ (\mathtt{zp}) &= \mathtt{pair}\ 0\ 0\\ \mathtt{sp}^m\ (\mathtt{zp}) &= \mathtt{pair}\ (\mathtt{m}-1)\ \mathtt{m}\end{aligned}$$

(здесь $m > 0$). Тогда функция предшествования:

$$\mathtt{pred} \ = \ \lambda m.\, \mathtt{fst}\ (m\ \mathtt{sp}\ \mathtt{zp})$$

▶ Какая у неё временная сложность?

▶ Что нужно поменять, чтобы вышел факториал?

Числа Чёрча: **примитивная рекурсия**.
Обобщим предыдущую схему

$$
\begin{aligned}
\mathtt{xz} &\equiv \lambda x.\, \mathtt{pair}\ x\ 0 \\
\mathtt{fs} &\equiv \lambda f\, p.\, \mathtt{pair}\ (f\ (\mathtt{fst}\ p)\ (\mathtt{snd}\ p))\ (\mathtt{succ}\ (\mathtt{snd}\ p)) \\
\mathtt{rec} &\equiv \lambda m\, f\, x.\, \mathtt{fst}\ (m\ (\mathtt{fs}\ f)\ (\mathtt{xz}\ x))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \langle & x, \arrow[dl] & 0\,\rangle \arrow[dl] \arrow[d, "\mathtt{succ}"] \\
 & & \langle f & x \arrow[dl] & 0, & 1\,\rangle \arrow[dl] \arrow[d, "\mathtt{succ}"] \\
 & \langle f\ (f & x \arrow[dl] & 0) & 1, & 2\,\rangle \arrow[dl] \arrow[d, "\mathtt{succ}"] \\
\langle f\ (f\ (f & x & 0) & 1) & 2, & 3\,\rangle
\end{tikzcd}
$$

В частности,

$$\mathtt{pred} \ = \ \lambda m.\, \mathtt{rec}\ m\ (\lambda x\, y.\, y)\ 0$$

► Реализуйте факториал через комбинатор примитивной рекурсии `rec`.
► Реализуйте функцию суммирования чисел от 1 до n.
► Реализуйте функцию нахождения n-ой частичной суммы ряда $\sum_{k=1}^{n} f(k)$.

Конструкторы **списков** можно определить так:

$$
\begin{aligned}
\mathtt{nil} &\equiv \lambda c\, n.\, n \\
\mathtt{cons} &\equiv \lambda e\, l\, c\, n.\, c\, e\, (l\, c\, n)
\end{aligned}
$$

Например,

$$
\begin{aligned}
&[\,] = \mathtt{nil} \ = \ \lambda c\, n.\, n \\
&[5, 3, 2] \ = \ \mathtt{cons}\ 5\ (\mathtt{cons}\ 3\ (\mathtt{cons}\ 2\ \mathtt{nil})) \ = \ \lambda c\, n.\, c\ 5\ (c\ 3\ (c\ 2\ n))
\end{aligned}
$$

Функция, определяющая пуст ли список

$$\mathtt{empty} \equiv \lambda l.\, l\ (\lambda h\, t.\, \mathtt{fls})\ \mathtt{tru}$$

► Проверьте правильность работы `empty`.
► Попробуйте найти более «короткую» версию `empty`.
► Постройте функцию `head`, возвращающую голову списка, например

$$\mathtt{head}\ [5, 3, 2] \ = \ 5$$

Хотя для комбинатора неподвижной точки Карри $\mathbf{Y} \equiv \lambda f.\,(\lambda x.\,f\,(x\,x))(\lambda x.\,f\,(x\,x))$ выполняется $\mathbf{Y}\,F \;=_\beta\; F\,(\mathbf{Y}\,F)$, но неверно ни $\mathbf{Y}\,F \;\twoheadrightarrow_\beta\; F\,(\mathbf{Y}\,F)$, ни $F\,(\mathbf{Y}\,F) \twoheadrightarrow_\beta \mathbf{Y}\,F$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Y}\,F &\equiv (\lambda f.\,(\lambda x.\,f\,(x\,x))(\lambda x.\,f\,(x\,x)))\,F \\
&\to_\beta (\lambda x.\,F\,(x\,x))(\lambda x.\,F\,(x\,x)) \\
&\to_\beta F((\lambda x.\,F\,(x\,x))(\lambda x.\,F\,(x\,x))) \;\to_\beta\; \ldots
\end{aligned}$$

► Проверьте, что комбинатор неподвижной точки Тьюринга $\boldsymbol{\Theta}$

$$A = \lambda x\,y.\,y\,(x\,x\,y),\;\; \boldsymbol{\Theta} = A\,A$$

обладает нужным свойством.
► Найдите G, такой что $\forall X\;\, G\,X \twoheadrightarrow X\,(X\,G)$.

Домашнее задание

►(1 балл) Приведите пример замкнутого чистого λ-терма находящегося
– в слабой головной нормальной форме, но не в головной нормальной форме;
– в головной нормальной форме, но не в нормальной форме.

►(1 балл) Напишите функции: `minus`, вычитающую числа Чёрча, `equals`, сравнивающую два числа Чёрча на предмет равенства, а также всевозможные неравенства, строгие и нестрогие, `lt`, `gt`, `le`, `ge`.

► (1 балл) Постройте функции:
– `sum` суммирующую элементы списка, например

$$\texttt{sum}\;[5,3,2] \;=\; 10$$

– `length` вычисляющую длину списка, например

$$\texttt{length}\;[5,3,2] \;=\; 3$$

► (3 балла) Постройте функцию `tail`, возвращающую хвост списка, например

$$\texttt{tail}\;[5,3,2] \;=\; [3,2]$$

►(2 балла) Используя $\mathbf{Y}$-комбинатор, сконструируйте
– «пожиратель», то есть такой терм F, который для любого M обеспечивает $F\,M = F$.

– терм F таким образом, чтобы для любого M выполнялось $\mathsf{F}\,\mathsf{M} = \mathsf{M}\,\mathsf{F}$.
– терм F таким образом, чтобы для любых термов M и N выполнялось $\mathsf{F}\,\mathsf{M}\,\mathsf{N} = \mathsf{N}\,\mathsf{F}\,(\mathsf{N}\,\mathsf{M}\,\mathsf{F})$.

►(2 балла) Пусть имеются взаимно-рекурсивное определение функций `f` и `g`:

$$\begin{array}{rcl} \mathtt{f} & = & \mathsf{F}\,\mathtt{f}\,\mathtt{g} \\ \mathtt{g} & = & \mathsf{G}\,\mathtt{f}\,\mathtt{g} \end{array}$$

Используя **Y**-комбинатор, найдите нерекурсивные определения для `f` и `g`.