

## Домашнее задание №2

1. Установите, существует ли предел последовательности и, если он существует, найдите его:
- а) (1)  $x_n = \frac{3^{n+1} - (-4)^n}{(-3)^n + 4^{n+1}}$ ;
  - б) (1)  $x_n = \sqrt[3]{n^3 + 2n^2} - n$ ;
  - в) (1)  $x_n = \log_{(n^5 + 3 \cos^2(n))}(n^2 + 2 \sin^2(n))$ ;
  - г) (1)  $x_n = \left(1 + \frac{100}{n}\right)^n$ ;
  - д) (1)  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n$ .
2. (1) Найти предел  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \operatorname{arccotg} \left( 2 \frac{n\sqrt{n} - (n+1)\sqrt{n+1}}{\sqrt{9n-2}} \right)$ .
3. а) (1) Докажите, что предел последовательности  $x_n = \prod_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$  равен  $\frac{1}{2}$ .
- б) (2) Докажите, что последовательность  $y_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{k^2}\right)$  имеет конечный предел.
- в) (3) Пусть последовательность  $\{\sigma_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  такова, что  $\sigma_k = \pm 1$ . Докажите, что последовательность  $z_n = \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{\sigma_k}{k^2}\right)$  имеет конечный положительный предел.
4. (3) Найдите предел  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{1 \leq k \leq 2n} 2^{-\frac{nk}{n+k}}$ .
5. (2) Пусть  $x_0 > 0$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Найдите предел последовательности  $x_n$ , если  $x_{n+1} = \frac{k-1}{k}x_n + \frac{1}{x_n^{k-1}}$ .
6. Пусть  $a_j \geq 0$ ,  $1 \leq j \leq p$ . Найдите предел
- а) (3)  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{a_1^n + a_2^n + \dots + a_p^n}{n} \right)^{\frac{1}{n}}$ ;
  - б) (3)  $\lim_{n \rightarrow -\infty} \left( \frac{a_1^n + a_2^n + \dots + a_p^n}{n} \right)^{\frac{1}{n}}$ .
7. (4) Вывести из теоремы Тёплица теорему Штольца.