

Математическая логика

Практика 9, продолжение

17/05/2018

Секвенциальное исчисление предикатов

Напомним некоторые правила в исчислении секвенций

Схема аксиом:

$$A, \Gamma \vdash A, \Delta$$

Правила введения конъюнкции в антецедент и сукцедент:

$$\frac{A, B, \Gamma \vdash \Delta}{A \wedge B, \Gamma \vdash \Delta} (\wedge \vdash) \quad \frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \wedge B, \Delta} (\vdash \wedge)$$

Правила введения дизъюнкции в антецедент и сукцедент:

$$\frac{A, \Gamma \vdash \Delta \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \vee B, \Gamma \vdash \Delta} (\vee \vdash) \quad \frac{\Gamma \vdash A, B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta} (\vdash \vee)$$

Правила введения импликации в антецедент и сукцедент:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \quad B, \Gamma \vdash \Delta}{A \rightarrow B, \Gamma \vdash \Delta} (\rightarrow \vdash) \quad \frac{A, \Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \rightarrow B, \Delta} (\vdash \rightarrow)$$

Правила введения отрицания в антецедент и сукцедент:

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\neg A, \Gamma \vdash \Delta} (\neg \vdash) \quad \frac{A, \Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta} (\vdash \neg)$$

Правила введения квантора существования в антецедент и сукцедент:

$$\frac{A[x := y], \Gamma \vdash \Delta}{\exists x A, \Gamma \vdash \Delta} (\exists \vdash) \quad \frac{\Gamma \vdash A[x := \tau], \Delta}{\Gamma \vdash \exists x A, \Delta} (\vdash \exists)$$

Правила введения квантора всеобщности в антецедент и сукцедент:

$$\frac{A[x := \tau], \Gamma \vdash \Delta}{\forall x A, \Gamma \vdash \Delta} (\forall \vdash) \qquad \frac{\Gamma \vdash A[x := y], \Delta}{\Gamma \vdash \forall x A, \Delta} (\vdash \forall)$$

NB: Переменная y не должна входить свободно в Γ и Δ . От всех подстановок требуется корректность.

Задания. Везде требуется построить дерево вывода для данной формулы в секвенциальном исчислении предикатов.

- $\vdash \exists x P(x) \rightarrow \exists y P(y)$
- $\vdash \exists x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow \exists x P(x) \vee \exists x Q(x)$
- $\vdash \forall x Q(x, x) \rightarrow \forall x \exists y Q(x, y)$
- $\forall x (P(g(x)) \rightarrow P(x)) \vdash \forall x (P(g(g(x))) \rightarrow P(x))$

Домашнее задание

Везде требуется построить дерево вывода для данной формулы в секвенциальном исчислении предикатов:

1. (16.) $\vdash \exists y \forall x Q(x, y) \rightarrow \exists x Q(x, x)$
2. (26.) $\vdash \exists x (P(y) \vee P(f(z))) \rightarrow P(x)$
3. (26.) $\vdash \exists x \forall y (P(x) \rightarrow P(y))$