k-связные графы. Теорема Менгера

Домашнее задание №7

20 октября 2017 г.

Обязательная часть

1. (1.5 балла). Пусть G вершинно k-связен. Образуем из G новый граф G' путём добавления к G новой вершины y и не менее k рёбер из y в k различных вершин графа G. Доказать, что G' также k-связен.

2. (2 балла). Доказать, что после удаления произвольного ребра $e = (x, y)$ в орграфе D вершинная связность κ этого орграфа уменьшится как максимум на единицу, то есть что $\kappa(D - e) \geqslant \kappa(D) - 1$.

3. (1.5 балла). Назовем k-веером из вершины x в множество Y набор из k путей, начинающихся в x, заканчивающихся в Y, и не имеющих никаких общих вершин, кроме вершины x. Пусть G есть k-связный граф, x — некоторая его вершина, а Y — набор из не менее чем k вершин графа G, не включающий x. Доказать, что тогда существует k-веер из x в Y.

4. (1.5 балла). Модифицировать алгоритм Хопкрофта-Тарьяна для поиска мостов в односвязном графе G. Реализовать алгоритм поиска всех блоков и точек сочленения в односвязном простом графе G.

5. (1 балл). Описать разложение на ручки для графа Петерсена.

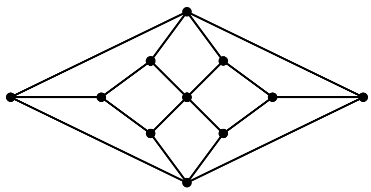

Рис. 1

6. (1.5 балла). Чему равно минимальное количество ручек в разложении графа, показанного на рис.1? Начальный цикл в разложении ручкой не считается.

7. (1.5 балла). Доказать, что граф G является двусвязным тогда и только тогда, когда его можно представить в виде
$$G = G_0 \cup G_1 \cup \ldots \cup G_k,$$
где G_0 — произвольный цикл в графе G, а G_i, $i > 0$, представляет собой либо ручку, либо замкнутую ручку для подграфа $G_0 \cup G_1 \cup \ldots \cup G_{i-1}$ графа G.

8. (1 балл). *Сильной ориентацией* неориентированного графа назовём такой выбор направления для каждого из его рёбер, что в результате этой операции получившийся ориентированный граф будет состоять из одной компоненты сильной связности. Доказать, что связный граф G допускает сильную ориентацию тогда и только тогда, когда он рёберно двусвязен, то есть тогда и только тогда в G отсутствуют мосты (Robbins, 1939).

Дополнительная часть

1. (2 балла). Пусть G есть k-связный граф, диаметр которого равен d. Доказать, что количество n вершин в таком графе больше или равно $k(d-1)+2$. Для любого $k \geqslant 1$ и $d \geqslant 2$ построить k-связный граф, в котором это неравенство превращается в равенство.

2. (2 балла). Пусть G есть k-связный граф, а C и D есть два цикла в G максимальной длины. Для случаев $k = 2$ и $k = 3$ доказать, что C и D имеют по меньшей мере k общих вершин.