

1 Домашнее задание (обязательное)

Задание 1.1. Вывести формулу вероятности для биномиального распределения:

$$P_{n,p}(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Задание 1.2. Вывести формулу вероятности для гипергеометрического распределения:

$$P_{N,K,n}(\xi = k) = \frac{\binom{K}{k} \binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}.$$

Задание 1.3. По окончании семестра студентам требуется сдать пять экзаменов: по философии, обществознанию, социологии и два экзамена по математике. Считая, что порядок экзаменов выбирается случайно, найти вероятность того, что экзамены по математике будут стоять подряд.

Задание 1.4. Рассмотрим покер без замены карт и общей сдачи — каждый игрок просто получает пять карт на руки. Играем колодой на 54 листа (с двумя джокерами). Найти вероятность того, что конкретный игрок получит каре (4 карты одинакового достоинства, при этом джокер может считаться любой картой).

Задание 1.5. За столом сидят четыре мушкетера, у каждого в руках колода карт на 52 листа. Одновременно каждый достает из колоды одну карту и кладет на стол. Карты перемешивают и вскрывают.

1. Сколько возможных сочетаний карт может быть?
2. Равновероятны ли они?
3. Какова вероятность того, что лежат четыре туза?

Задание 1.6. В группе n студентов. Найти вероятность того, что хотя бы у двух студентов совпадает день рождения. Считаем, что все родились не в високосный год, день рождения случаен и все дни при этом равновероятны.

Задание 1.7. Доказать формально следующие свойства вероятности:

1. Монотонность: $A \subseteq B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$.
2. Непрерывность 2: пусть дана возрастающая последовательность событий $B_1 \subseteq B_2 \subseteq B_3 \subseteq \dots$, $B_i \in \mathcal{F}$, $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Тогда $P(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n)$.
3. Формула включений-исключений: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Задание 1.8. Монету подбрасывают n раз. Какова вероятность выпадения четного числа гербов?

Задание 1.9. На бесконечную клетчатую (размер клетки 1×1) плоскость бросают круглую монету радиуса r . Найти вероятность того, что монета пересечет линию.

Задание 1.10. Круглая мишень разделена на десять колец равной толщины. Кольца пронумерованы от 1 до 10, начиная с края. Стрелок бьет по мишени, при этом он с вероятностью 0.2 промахивается, а в противном случае попадает в произвольную точку мишени. Найти вероятность за два выстрела выбить ровно 10 очков.

2 Задачи, разобранные на занятии

Задание 2.1. Найти вероятность вытащить дубль из набора домино.

Задание 2.2. К семейной паре домой приходят n гостей. Все вместе в случайном порядке рассаживаются за круглым столом. Какова вероятность того, что хозяева будут сидеть рядом?

Задание 2.3. Доказать формально следующие свойства вероятности:

1. $P(\emptyset) = 0$.
2. Непрерывность: пусть дана убывающая последовательность событий $B_1 \supseteq B_2 \supseteq B_3 \supseteq \dots, B_i \in \mathcal{F}, B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n$. Тогда $P(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n)$.

Задание 2.4. Из колоды в 52 карты случайно вынимают одну. Если рассмотреть события «выпала пика» и «выпала дама», то легко показать, что они будут независимы по определению. Сохранится ли независимость, если:

1. убрать из колоды пиковую даму;
2. убрать из колоды всех тузов;
3. убрать из колоды всех дам;
4. убрать из колоды всех пик;
5. убрать из колоды бубновую девятку;
6. добавить в колоду джокера;

Задание 2.5. На бесконечную, разлинованную с шагом 1, плоскость бросают круглую монету радиуса r . Найти вероятность того, что монета пересечет линию.

Задание 2.6 (Задача Бюффона). На бесконечную, разлинованную с шагом 1, плоскость бросают тонкую спицу длины 1. Найти вероятность того, что спица пересечет линию.

Задание 2.7. Стрелок бьет в круглую мишень радиуса 1, попадая равномерно в произвольную точку. Найти функцию распределения и плотность расстояния от точки попадания до центра мишени.

Задание 2.8. На квадратном стенде нарисована круглая мишень. Края мишени касаются всех четырех краев стенда. Стрелок бьет по мишени, но попадает каждый раз в произвольную точку стенда. Найти вероятность попасть в мишень при единственном выстреле.

3 Дополнительные задачи (сложные)

Задание 3.1. Игральную кость выбрасывают n раз. Какова вероятность того, что шестерка выпадет нечетное число раз?

Задание 3.2. Погнутую монету (с вероятностью выпадения герба $p \in (0, 1)$) подбрасывают n раз. Какова вероятность выпадения четного числа гербов?

Задание 3.3. На бесконечную, разлинованную с шагом 1, плоскость бросают тонкую спицу длины l . Найти вероятность того, что спица пересечет линию.

Задание 3.4. Рассмотрим покер без замены карт и общей сдачи — каждый игрок просто получает пять карт на руки. Играем колодой на 54 листа (с двумя джокерами). Найти вероятность того, что конкретный игрок получит стрит (пять карт со значениями, идущими подряд, при этом джокер может считаться любой картой).