② Задачи раскладки n неразличимых предметов по k неразличимым ящикам. Операционная техника.

1. ~~Определение~~ Разбиением целого положительного числа n ровно на k ~~сл~~ слагаемых (на k частей) наз. неупорядоченный набор ровно ~~чисел~~ из k целых положит. чисел, сумма кот. равна n.

Очевидно, что $\forall$ такое разбиение дает нам некоторое решение уравнения

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n, \quad \text{где} \qquad (*)$$
$$x_1 \geq x_2 \geq \ldots \geq x_k \geq 1.$$

Очевидно также, что $\forall$ такое разбиение дает нам некоторый вариант раскладки n неразличимых ~~шаров~~ предметов по k неразличимым ящикам при условии, что в $\forall$ ящике находится хотя бы один предмет.

2. Количество таких разбиений обозначается обычно через $p_k(n)$. Например,

$$p_2(5) = 2, \text{ т.к. } 5 = 4+1 = 3+2; \quad p_3(5) = 2, \text{ т.к. } 5 = 2+2+1 = 3+1+1.$$

Далее, $p_3(7) = 4$, т.к. $7 = 5+1+1 = 4+2+1 = 3+3+1 = 3+2+2$

3. ~~Задача~~ ~~Положим~~ Очевидно, что $p_1(n) = 1: \ n = n$

$\cancel{p_k(n) = p_{k-1}(n) + p_k(n-k)}$ (4) $p_n(n) = 1: \ n = \underbrace{1+1+\ldots+1}_{n}$

~~Собственно, это очевидно: каждая же, что и свободно~~

~~Но тогда: $p_{k-1}(n) = p_{k-2}(n) + p_{k-1}(n-k)$~~

Теперь,
$$p(n) = \sum_{k=1}^{n} p_k(n).$$

Утверждение 1

4. Положим теперь, что

$$p_k(n) = \sum^{m} p_r(n-k), \qquad k = 2, 3, \ldots, n-1;$$

где $m = \min\{k, n-k\}$; $p_1(n) = p_n(n) = 1$,

$$p_k(n) = 0 \quad \forall k > n.$$

1) Действительно, пусть $z_i = x_i - 1 \Rightarrow z_i + 1 = x_i \Rightarrow$
$\Rightarrow (*) \iff$
$$z_1 + \ldots + z_k = n-k, \quad z_1 \geq z_2 \geq \ldots \geq z_k \geq 0. \qquad (**)$$

2) Очевидно, что если $n-k \leq k$, $\iff n \leq 2k \iff k \geq n/2$, то:

Пример: $p_3(5)$: $k=3$, $n=5$, $3 > 2.5$

$$(**) \iff z_1 + \ldots + z_{n-k} = n-k, \quad z_1 \geq z_2 \geq \ldots \geq z_{n-k} \geq 0,$$

а количество решений такой системы есть, по определению,
$$p(n-k) = \sum_{r=1}^{n-k} p_r(n-k)$$

$p_3(5) = p(5-3) = p(2) = 2$

3) Далее, если $n-k \geq k \iff n \geq 2k \iff 0 < k \leq n/2$, то:

$$(**) \iff z_1 + \ldots + z_k = n-k \geq k, \quad z_1 \geq z_2 \geq \ldots \geq z_k \geq 0,$$

$= p_1(2) + p_2(2) = \ldots$

Тогда: все мн-во решений этой системы мы можем разбить на ~~блоки~~ k блоков $(r = 1 \ldots k)$, включив в r-й блок решения, в кот.
$$z_1 \geq z_2 \geq \ldots \geq z_r \geq 1, \quad z_{r+1} = z_{r+2} = \ldots = z_k = 0.$$
Но: число решений в $\forall$ r-м блоке $=$
$= p_r(n-k) \Rightarrow$ по правилу суммы
$$\boxed{p_k(n) = \sum_{r=1}^{k} p_r(n-k)}$$

Пример: $p_2(5) = ?$
$5 - 2 = 3 > 2 \Rightarrow$
$\Rightarrow p_2(5) = p_1(3) + p_2(3) = 1 + 1 = 2$

~~5. Замечание. ~~Рекуррентное~~ Аналогично рассуждениям с бандеролью, показывается, что ~~для~~ для $p_k(n)$ справедливо рекурр. соотношение~~

$$\cancel{p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)}$$

5. Замечание. Рассмотрим 2й случай $1 \le k \le n/2$.

Следствием утверждения 1 явл. след. рекурр. соотношение для $p_k(n)$:

$$p_k(n) = \sum_{r=1}^{k} p_r(n-k) = p_k(n-k) + \sum_{r=1}^{k-1} p_r(n-k)$$

Но. $$p_{k-1}(n-1) \overset{\text{Ут.1}}{=} \sum_{r=1}^{k-1} p_r((n-1)-(k-1)) = \sum_{r=1}^{k-1} p_r(n-k) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{p_k(n) = p_{k-1}(n-1) + p_k(n-k)} \qquad (***)$$

Отметим, что оно остаётся верным и для $k > n/2$: в этом случае просто $p_{\underset{>n/2}{k}}(\underbrace{n-k}_{<n/2}) = 0$, т.к. $p_k(n)=0$ при $k>n$.

Рекурр. соотнош. (***) м.б. получено и из непосредственных комбинаторных соображений.

1) Вначале - пример:

$$p_2(6) = 3: \quad 6 = 5+1 = 4+2 = 3+3$$

$$p_2(6) = p_1(5) + p_2(4) = 1 + 2 = 3$$

Что здесь что? $5+1$: единица - входит в разложение, $4+2=3+3$ - единица не входит $\Rightarrow$ разбиение на 2 блока.

2) 1й блок: единица - входит хоть раз $\Rightarrow$ на k-м месте она (перенумеровано) стоит $\Rightarrow$ на предыд. $(k-1)$ местах стоит разбиение $(n-1)$ на $(k-1)$ гостей $\Rightarrow$ имеем $p_{k-1}(n-1)$ вариантов.

3) 2й блок: единица - не входит $\Rightarrow$ n рассаживаем на $2, \dots, n$ $\Rightarrow$ вычтем из x_i единицу $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ получим разложение $(n-k)$ на k гостей $\Rightarrow$ ...

6. Наряду с разбиением n ровно на k частей вводят также разбиение n на ~~ччч~~ не более чем k частей. Очевидно, что это разбиение

а) Дает нам некоторое решение ур-ия

$$x_1+x_2+\ldots+x_k=n,$$
$$x_1\geq x_2\geq\ldots\geq x_k\geq 0 \quad (!)$$

б) Представляет собой некоторый вариант раскладки n неразличимых шаров по k неразличимым ящикам при ~~условии~~ отсутствии каких-либо ограничений на кол-во шаров в $\forall$ ящике.

~~Обозначим, что~~ Кол-во таких разбиений ~~об~~ обозначим через $P_k(n)$. Ясно, что

а) $p_k(n)=P_k(n)-P_{k-1}(n)$

б) $p(n)=P_k(n)$ при $k\geq n$.

в) $P_k(n)=\sum_{r=1}^{k} p_r(n)$ двойственные: $p_k=\Delta P_k \Rightarrow P_k=\sum p_k$

г) $P_1(n)=1$: это само число n.

$P_k(0)=1$ (вырожденный случай); почему возможен? $\forall$ кол-во шаров в $\forall$ ящике $\Rightarrow$ может и не быть ни одного шара ни в одном ящике такой случай - единств. $\Rightarrow P_k(0)=1$ $\forall k$

д) Наконец, для $P_k(n)$ справедливо рекурр. соотношение

$$P_k(n)=P_{k-1}(n)+P_k(n-k), \quad k=2,\ldots,n; \quad (+)$$

~~которое доказывается аналогично задаче о бандеролях.~~

1) Все мн-во ~~ва~~ вариантов делится на 2 блока: в 1й блок число k не входит $\Rightarrow P_{k-1}(n)$; во 2й блок оно входит хоть раз $\Rightarrow P_k(n-k)$

1) Разумеется, это соотношение можно д-ть формально, а именно:

$$P_k(n)=\sum_{r=1}^{k} p_r(n)=\sum_{r=1}^{k-1} p_r(n)+p_k(n).$$

Но: $\sum_{r=1}^{k-1} p_r(n)=P_{k-1}(n)$;

$p_k(n)\overset{\text{Ув.1}}{=}\sum_{r=1}^{m} p_r(n-k)=P_m(n-k)$, где $m=\min\{k,\,n-k\}$.

Но, если $k>n-k$, то $P_{n-k}(n-k)=P_k(n-k)$ $\Rightarrow\ldots$

2) Однако хочется д-ть ~~его и комбинаторно~~ $\Rightarrow$ не катит!

$\Rightarrow$ а) 1-й подход: разобьем все м-во вариантов на 2 блока. В 1-й из них включим разбиения в кот. хотя бы 1 раз встречается число k $\Rightarrow$ таких в-тов $P_k(n-k)$.

Во 2-й из них включим варианты, в кот. число k не встречается $\Rightarrow$ вопрос: почему кол-во таких в-тов $=P_{k-1}(n)$? — числу разбиений n на не более чем $(k-1)$ частей? (по опр-ию)

б) 2-й подход: ~~[illegible]~~ Разобьем м-во всех в-тов на 2 блока. В 1-й блок включим разбиения, состоящие ровно из k гостей $\Rightarrow$ во 2-й блок включим разбиения, состоящие ~~из~~ не более чем из $(k-1)$ гостей. Очевидно, что число э-тов в 1-м блоке $=P_{k-1}(n)$.

$P_3(6)=7=\underbrace{P_2(6)}_{=4}+\underbrace{P_3(3)}_{=3}=P_3(6)$ 3

5+1, 4+2, 3+

$P_2(6)=4=\underbrace{P_1(6)}_{1}+\underbrace{P_2(4)}_{3}=P_2(6)=$

$3\rightarrow 4,\ 3+1,\ 2+2$

Вопрос: почему кол-во разбиений, состоящих ровно из k гостей, $=P_k(n-k)$? — ~~числу разбиений на n на k частей, в кот. число k входит хотя бы 1 раз?~~

в) Эксперимент: $P_4(6)=9=P_3(6)+P_4(2)=7+2$:

$6=5+1=4+2=4+1+1=3+3=3+2+1=3+1+1+1=2+2+2=2+2+1+1$

г) Видно, что нам достаточно д-ть след.

<u>Утв.</u> ~~1~~ 2 Количество разбиений ($n-k$) числа на не более чем k частей, ~~в которых число k встречается хотя бы один раз~~ (т.е. $P_k(n-k)$) равно количеству $p_k(n)$ разбиений числа n, состоящих ровно из k частей:

(~~По сути, переформулир. Утв. 1 → Утв. 1!~~)

Или: ~~кол-во разбиений ($n-k$) на не более чем k частей =~~
Или: кол-во — " — n на $\leq k$ частей =

$$\boxed{p_k(n) = P_k(n-k)} \iff \boxed{P_k(n) = p_k(n+k)}$$

= кол-ву разбиений $n+k$ ровно на k частей.

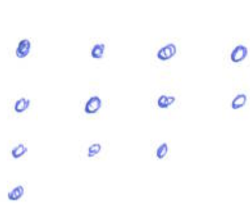
<u>Замечание</u> Так как $P_k(n-k) = \sum_{r=1}^{k} p_r(n-k)$, то, по сути, мы хотим получить не формальное, а комбинаторное д-во Утв. 1. $\Rightarrow$ это — Утв. 1!

<u>Вопрос:</u> как же это сделать? Оказывается, здесь очень полезна т.н. <u>диаграммная техника</u>.

7. <u>Опр-е</u> Диаграммой Ферре наз. следующее графическое представление $\forall$ разбиения числа n: каждый член разбиения ($\forall$ слагаемое) представляется в виде ряда из соответствующего числа точек. При этом, т.к. слагаемые (члены) в разбиении записываются обычно в порядке невозрастания ($5=4+1=3+2$), то и в диаграмме Ферре строчки тоже рисуют в порядке невозрастания $\oplus$ примыкающими к левому краю (т.н. нормализованные диаграммы Ферре).

<u>Примеры:</u>

а) $n = 12 = 4+4+3+1 \iff$



б) $n = 5 = 3+2 \iff$

Иногда удобно вместо точек рисовать квадраты ⟹
⟹ в этом случае такие графич. представления разбиений наз. <u>диаграммами Юнга</u>

<u>Пример</u>: 

С пом. диаграмм Ферре (Юнга) удобно доказывать многие св-ва разбиений.

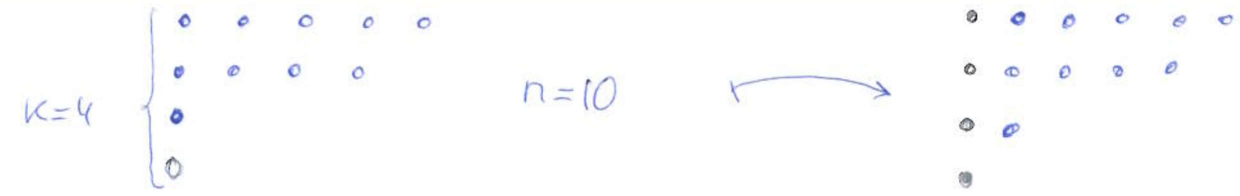
Докажем, например, что число $P_k(n)$ разбиений n на не более чем k слагаемых = числу способов разбиения $n+k$ ровно на k слагаемых, т.е. что

$$P_k(n) = p_k(n+k).$$

• Док-во Утв. 1'.2. Берем диагр. Ф. разб. <u>ровно</u> на k частей и удаляем 1-ю строку ⟹ ...

• Док-во Утв. 1'.3

1) Диаграмма Ферре, изображающая разбиение n на не более чем k слагаемых, состоит из n точек, расположенных в не более чем k строках:



2) Тогда: дополним ее снизу нулевыми строками так, чтобы в ней стало <u>ровно</u> k строк, и добавим к ней слева столбец, состоящий ровно из k точек ⟹ получим диаграмму Ферре, состоящую из $(n+k)$ точек, и содержащую хотя бы один столбец, состоящий ровно из k точек. Но последнее и означает, что в разбиении имеется ровно k частей ⟹

3) Обратно, имея ∀ такую диагр. из $(n+k)$ точек, мы, отбрасыва

А чем раз из утв., кот. и изначально сформулированы — по разбиению (т.е. Утв.1) 17

8. При использовании диаграммной техники часто ~~находят~~ оказывается полезным. Для этого используется понятие т.н. двойственной (conjugate) диаграммы.

число n на ≤ k слаг. при усл., что число k в нем присутствует = = кол-ву разбиений на ровно k слаг.

1) Рассмотрим произвольную диагр. Ферре. По опред., мы ее читаем по строкам, понимая при этом, что ∀ строке отвечает некоторая часть разбиения. Но: мы эту же диаграмму можем читать и по столбцам, т.е. можем трактовать ∀ столбец как некоторую часть разбиения.

Пример: см. стр 14 пол. пункт, эк-сперимент

2) Пример:

⟺ $10=5+4+1$

Пример) $P_4(6)=2$: есть часть $=4$(!)

$P_4(n-k) = P_4(2) = p(2)$

$10 = 3+2+2+2+1$. ⟺

Пример 3: $P_2(4)$

3) Такого рода диаграмма, полученная из исходной поворотом на 90° по часовой стрелке и отражением ~~вдоль~~ относит. оси ординат (или просто нормализацией) и наз. диаграммой, двойственной к исходной.

Тогда: если исход. диагр. содержит ровно k частей, то

4) Зачем они нужны? ~~Докажем для примера то же самое Утв.2 с пом. двойственных диаграмм~~ Рассм. диагр. Ферре двойственная к ней диагр. содержит хотя бы одну часть $= k$

В случае, когда разбиение n имеет ровно k частей, такая диаграмма Ферре имеет, по опред., ровно k строк.

Но: это означает, что двойственная ей диаграмма — это диаграмма, в кот. хотя бы одна часть $=k$, а все остальные части $\le k$. В силу взаимной однозначности таких диаграмм: кол-во таких и таких диаграмм совпадает ⟹ $P_k(n) = P_k(n-k)$

Утв.3' Кол-во разбиений n ровно на k частей = кол-ву разбиений n на части $\le k$

~~Теперь~~: понятие двойств. диагр. ~~Теперь~~ очень полезным для построения произв. функций для $p_k(n)$ и $P_k(n)$

5) ~~Далее~~, Рассмотрим диаграммы Ферре у кот. $\leq K$ строк. Таких диаграмм для заданного n ровно $P_k(n)$ штук. — Кончилось $P_k(n)$.

Любой такой диаграмме отвечает двойственная диаграмма, в кот. $\forall$ часть имеет размер, $\leq k \Rightarrow$
$\Rightarrow P_k(n) =$ числу таких диаграмм.

Но: любое ~~диаграмма~~ разложение n на части, $\leq k$, ~~есть~~ доставляет решение след. ур-ия:

$$1 \cdot y_1 + 2 \cdot y_2 + \ldots + k \cdot y_k = n,$$
$$y_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, k,$$

а мы знаем, как такие ур-ия решать — ~~число~~ их решения описываются с пом. обычных произв. функций вида

$$F_k(x) := (1+x+x^2+\ldots)(1+x^2+x^4+\ldots)\ldots(1+x^k+x^{2k}+\ldots) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^k)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ доказано, что $F_k(x)$ является производящей функцией для ~~числа~~ кол-ва разбиений n на не более чем k слагаемых (частей), т.е. для числа $P_k(n)$, т.е. для кол-ва раскладок n неразличимых предметов по k неразличимым ящикам при ~~условии~~ отсутствии каких-либо ограничений на кол-во предметов в ящиках.

6) А теперь вернемся к двум ~~главам~~ Утв.

~~$p_k(n) = P_k(n-k)$~~

Что такое теперь $P_k(n-k)$? Это кол-во разбиений n на какое-то кол-во частей, в которых все части $\leq k$, а одна часть — строго $= k$. Кроме того, доказано

Утв. 3. Кол-во разбиений n на не более чем k частей $=$ кол-ву разбиений n на части, $\forall$ из кот. $\leq k$

6) ~~Вернемся теперь к Утв. 3.~~ ① Что оно означает с т. зрения производящих функций? Мы знаем, что кол-во разбиений n на части, $\leq k$, одна из кот. обязат. $= k$, есть кол-во решений ур-я

$$1\cdot y_1 + 2\cdot y_2 + \ldots + k\cdot y_k = n,$$
$$y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0, \ldots, y_{k-1} \geq 0;\ y_k \geq 1.$$

А для такой системы обыкнов. произв. ф-цию мы также умеем записывать — она ~~такова~~ равна

$$f_k(x) = (1+x+x^2+\ldots)(1+x^2+x^4+\ldots)\cdot\ldots\cdot(1+x^{k-1}+x^{(k-1)2}+\ldots)(x^k+x^{2k}+\ldots)$$
$$= \frac{x^k}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^k)} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f_k(x)$ — это производящая ф-ция для числа разбиений n ровно на k частей.

7) Т.о. двойственные диаграммы позволили нам сразу записать производящие ф-ции для чисел $p_k(n)$ и $P_k(n)$.

(*) Рассм. теперь диагр. Ферре разбиения n, у кот. имеется ровно k частей. Такая диагр. Ферре имеет, по опр-ю, ровно k строк. $p_2(6) = 3$: $5+1, 4+2, 3+3$

это — разбиения 6 везде $2+2+2, 2+2+1+1, 2+1+1+1+1$

Но: это означает, что двойственная к ней диаграмма Ферре — это диаграмма в кот. имеется хотя бы одна часть, $= k$, а остальные все части $\leq k$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ Утв. 4. Кол-во разбиений n ровно на k (заранее не определенное! кол-во) частей = разбиению n на части, $\leq k$, одна из кот. обязат. $= k$.

это не есть кол-во разбиений n на не более чем k частей, в кот. не входит число k!

Но: что это Утв. 4 означает с т. зр. обыкнов. произв. функций?

9. Вернемся к производящей функции $f(x)$ для числа $p(n)$ разбиений $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots} =: \dfrac{1}{Q(x)}$

и рассмотрим подробнее функцию

$$Q(x)=(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\dots,$$

стоящую в знаменателе.

1) Эйлер: начал перемножать эти скобки $\Rightarrow$ увидел следующее:

$$Q(x)=(1-x-x^2+x^5+x^7-x^{12}-x^{15}+x^{22}+\dots)(1-x^{23})(1-x^{24})\dots$$

Это – результат, получающийся в процессе перемножения первых $22^х$ скобок. Что отсюда видно?

а) При умножении на этой скобки $(1-x^{23})$ и т.д.: будут меняться коэф-ты при иксах со степенями, большими 22: коэф-ты при иксах со степенями ≤ 22, меняться, очевидно, уже не будут – происходит т.н. стабилизация коэф-тов в этом бесконечном произведении.

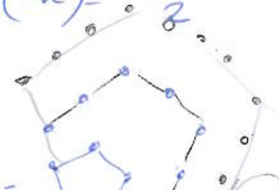
б) После стабилизации: остаются лишь коэф-ты, равные 0, 1 и -1, причем 1 и (-1) попарно чередуются: после двух (-1) идут $(+1)$ и т.д.

в) Наконец: что за числа стоят в степенях иксов с ненулевыми коэф-тами? После долгих экспериментов Эйлер установил следующее правило:

$$Q(x)=1+\sum_{k=1}^{+\infty}(-1)^k\cdot\left(x^{\frac{3k^2-k}{2}}+x^{\frac{3k^2+k}{2}}\right), \qquad (*)$$

числа $\omega(k) := \dfrac{3k^2-k}{2} = \sum\limits_{i=0}^{k-1}(3i+1)$ и $\omega(-k)=\dfrac{3k^2+k}{2}$

наз. пентагональными числами:

$\omega(1)=1$ • ; $\omega(2)=1+4=5$  ; $\omega(3)=1+4+7=12$:  $\omega(4)=1+4+7+10=22$

2) Фабиан Франклин в 1881г. доказал эту ф-лу комбинаторно, используя диагр. Ферре.

а) Прежде всего заметим, что $Q(x)$ очень похожа на функ.

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\cdot\ldots\cdot(1+x^k)\cdot\ldots,$$

описывающую разбиение n на <u>различные</u> слагаемые (части). Однако, в отличие от этой функц. в $Q(x)$ ∀ слагаемое, получающееся после перемножения, может входить как со знаком „+", так и со знаком „-". Когда какой знак получается? Очевидно, что если у нас сомножителей четное число, то получается знак „+"; если же нечетное - то знак минус. С точки зрения разбиения n на слагаемые это можно переформулировать с.о.: если n разбивается на <u>четное</u> число <u>частей</u> (напр., $12 = 5+4+2+1$), то коэфф при x^n имеет знак „+" ($(-x^5)\cdot(-x^4)(-x^2)(-x^1)) = x^{12}$, если же n разбивается на нечетное число частей (напр, $12=6+4+2$), то коэфф при x^n имеет знак „-" ($(-x^6)(-x^4)(-x^2) = -x^{12}$).

Далее, мы складываем коэф-ты при одинаковых степенях икса. Что тогда означает, что получающийся в рез-те сложения коэфф при x^n равен нулю? Очевидно, это означает, что кол-во разбиений данного n на четное число частей $p_e(n)$ = кол-ву разбиений $p_o(n)$ на нечетное число частей.

<u>Тогда</u>: теорема Эйлера утверждает, что итоговый коэфф при x^n будет $=0$ почти всегда, т.е. почти для $\forall n$ кол-во разбиений этого n на четное число частей = кол-ву его разбиений на нечетное число частей.

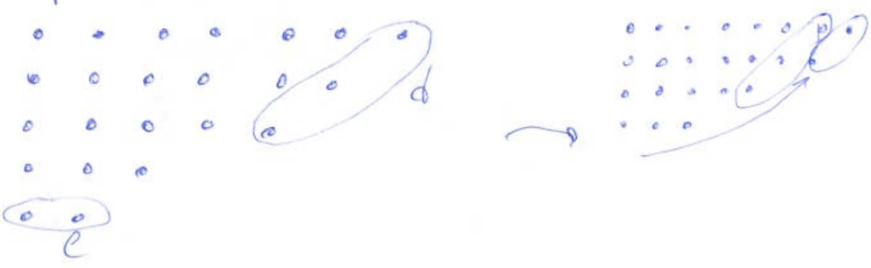
При этом, однако, $\exists$ исключительные числа

$n(k)=\frac{3k^2\pm k}{2}$, ~~для числа~~ такие, что:

- если k - четное, то кол-во четных разбиений $n(k)$ на 1 больше кол-ва нечетных разбиений;
- если же k - нечетное то — " — на 1 меньше — " —

б) Как же нам это доказать? Рассмотрим диаграмму Ферре разбиения n на различное число частей. У такой диаграммы все строки имеют разную длину => следовательно, сама диагр. ~~[illegible]~~ состоит из ~~некоторого~~ ~~[illegible]~~ кол-ва поставленных друг на друга трапеций:

Пример:

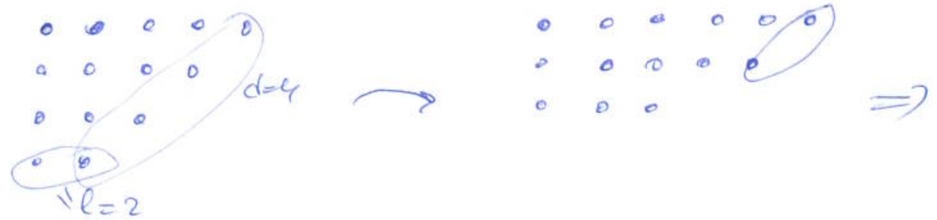


Теперь: (введем след. обозначения) ∃ l – длина самой нижней строки
d – длина ее „верхней диагонали", т.е. число строк в самой верхней трапеции.

в) Случай 1 ∃ $l \le d$ и диаграмма содержит не менее двух трапеций. Тогда: отрезаем нижнюю строку и приклеиваем ее к верхней диагонали:

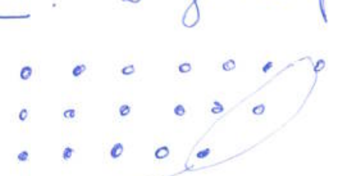
г) Случай 2: ∃ $l > d$ и — " — => отрезаем верхнюю диагональ и приклеиваем ее под нижней строкой.

д) Случай 3: ∃ диаграмма состоит из 1 трапеции и $d > l$:



=> отрезаем нижнюю строку и приклеиваем ее справа диагональю

е) Случай 4: ∃ диагр. состоит из 1 трапеции и $d < l - 1$



: отрезаем верхнюю диаг. и подклеиваем ее под нижнюю строку.