

### Задание 3

12.03.2017

**FL 10** Пусть язык  $L$  распознаётся некоторым DFA. Всегда ли следующие языки распознаются DFA?

c)  $SUBSEQ(L) = \{ a_1 \dots a_n \mid n \geq 0, a_i \in \Sigma, \exists u_0, \dots, u_n \in \Sigma^* : u_0 a_1 u_1 a_2 \dots a_n u_n \in L \}$

d)  $\frac{1}{2}L = \{ u \mid u \in \Sigma^*, \exists v \in \Sigma^* : |u| = |v|, uv \in L \}$

e)  $SHIFT(L) = \bigcup_{k \geq 0} \{ a_{k+1} \dots a_n a_1 \dots a_k \mid a_1 \dots a_n \in L \}$

f)  $h(L) = \{ h(x) \mid x \in L \}$ , где  $L \subseteq \Sigma^*$  и  $h$  — некоторый гомоморфизм на  $\Sigma^*$ .

g)  $h^{-1}(L) = \{ y \mid h(y) \in L \}$ , где  $L \subseteq \Sigma^*$  и  $h$  — некоторый гомоморфизм на  $\Sigma^*$ .

**FL 11** Пусть  $A \subseteq \mathbb{N}$ . Введём обозначение:

$$B_k(A) = \{ w \mid w \text{ — представление некоторого числа из } A \text{ в } k\text{-ичной системе счисления} \}$$

Приведите пример множества  $A$ , для которого  $B_2(A)$  распознаётся DFA, а  $B_3(A)$  не распознаётся DFA.

**Определение.** Будем говорить, что co-NFA  $A = (\Sigma, Q, q_0, \delta, F)$  принимает слово  $x \in \Sigma^*$ , если  $A$  заканчивает каждое вычисление на входе  $x$  в состоянии из  $F$ .

**FL 13** Докажите, что класс языков, распознающихся co-NFA, совпадает с классом языков, распознающихся NFA.

**FL 14** Существует ли такое семейство языков  $\{E_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ , что  $E_n$  распознаётся NFA с  $n$  состояниями, но требует DFA размера как минимум  $c^n$  для некоторого  $c > 1$ ?

**FL 15** Докажите нерегулярность следующих языков:

a)  $\{ 0^n \mid n \text{ — полный квадрат} \}$

b)  $\{ w \in \{0, 1\}^* \mid w \text{ — двоичное представление простого числа} \}$

**FL 16** Приведите алгоритм, который по данному DFA  $A$  вычисляет количество распознаваемых им слов длины  $n$  за время

a)  $poly(|Q_A| \cdot n)$

b)  $poly(|Q_A|) \cdot \log(n)$

**FL 17** Будем писать  $L_1 \ll L_2$ , если  $L_1 \subset L_2$  и  $|L_2 \setminus L_1| = \infty$ . Докажите, что если  $L_1, L_2$  — регулярные и  $L_1 \ll L_2$ , то существует такой регулярный язык  $L_3$ , что  $L_1 \ll L_3 \ll L_2$ .

**FL 18** Пусть  $M_1$  и  $M_2$  — DFA, имеющие  $k_1$  и  $k_2$  состояний соответственно, и пусть  $U = L(M_1) \cup L(M_2)$ , где  $L(A)$  — язык, который распознаётся автоматом  $A$ . Пусть  $U \neq \emptyset$  и  $U \neq \Sigma^*$ . Докажите, что  $U$  содержит некоторую строку  $s_1$  длины не более  $\max(k_1, k_2)$  и что существует не принадлежащая  $U$  строка  $s_2$  длины не более  $k_1 k_2$ .