

k -перестановки из n элементов. Урновые
схемы и схемы раскладки предметов по
ящикам. Числа Стирлинга второго
рода. (ДЗ)

28 февраля 2017 г.

1. В алфавите племени Бум-Бум всего шесть букв. Любое слово состоит у них из шести символов, причем в каждом таком слове должны быть хотя бы две одинаковые буквы. Сколько всего слов в языке племени Бум-Бум?
2. В купе поезда едет 6 человек. Поезд делает 5 остановок. Сколькими способами пассажиры могут распределиться между этими остановками?
3. Из группы, состоящей из 7 мужчин и 4 женщин, нужно выбрать 6 человек так, чтобы среди них было не менее двух женщин. Сколькими способами это может быть сделано?
4. Восемь студентов выбирают себе спецкурсы на семестр из списка, состоящего из четырех спецкурсов. Сколькими способами студенты могут записаться на эти спецкурсы так, чтобы каждый студент записался хотя бы на один спецкурс и чтобы на любой спецкурс записался хотя бы один студент.
5. В начале учебного года на кафедре происходит распределение нагрузки. Имеется 5 преподавателей и 7 различных групп студентов, которым эти преподаватели должны прочитать один и тот же курс. Любой преподаватель может вести занятия в любой группе. Подсчитать количество способов распределения нагрузки между преподавателями при условии, что каждый преподаватель должен вести занятия хотя бы в одной группе.

6. Сколько разных слов можно получить, переставляя буквы слов а) “математика”; б) “комбинаторика”?
7. Найти сумму четырехзначных чисел, которые можно получить при всевозможных перестановках цифр а) 1, 2, 3, 4; б) 1, 2, 2, 5.
8. Дать комбинаторное доказательство следующего рекуррентного соотношения для чисел Стирлинга:

$$S(n, k) = \sum_{i=1}^n S(n-i, k-1) k^{i-1}, \quad n \geq k.$$

9. Доказать, что для всех $n > 2$ числа Белла $B(n) < n!$.
10. Обозначим через $F(n)$ количество разбиений n -множества без блоков единичной длины. Доказать, что

$$B(n) = F(n) + F(n+1).$$