Домашнее задание

Для самостоятельного решения предлагается две задачи на “запрогать”. Чтобы не терять темп, дедлайн снова на следующую пару — там мы эти задачи разберем и обсудим результаты.

2.1 Independence

В классе мы разобрали следующую задачу:

Задача. Привести пример $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — распределенные $U[0,1]$ случайные величины такие, что любые $n-1$ из них совместно независимы, а все n вместе — нет.

Напомню, что предлагалось следующее решение: возьмем $\xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ совместно независимыми $U[0,1]$, а ξ_n возьмем $\xi_n = \{\xi_1 + \dots + \xi_{n-1}\}$, где $\{\cdot\}$ обозначает дробную часть (т.е. зацикливание по модулю 1).

Случайная величина ξ_n получается тоже равномерно распределенной $U[0,1]$ и при этом все случайные величины в некотором смысле “равноправны”, т.е. любая случайная величина выражается через остальные, поэтому в совокупности n величин зависимы. Любые же $n-1$ из них образуют равномерное распределение в $n-1$-мерном гиперкубе (замена любой из первых $n-1$ случайных величин на ξ_n не меняет распределения).

Предлагается промоделировать эту ситуацию (для разных n, например, для $3, 5, 10$) и убедиться:

- $n-1$-мерные распределения действительно независимые;
- n-мерные распределения действительно зависимые.

Как можно проверить зависимость-независимость. Во-первых, можно использовать графики (двумерные и трехмерные). Независимые случайные величины должны “заметать” гиперкуб целиком, т.е. двумерные графики должны выглядеть как заполненный квадратик. В отсутствии независимости точки будут сконцентрированы на небольшом количестве гиперплоскостей. Во-вторых, можно оценить с помощью Монте-Карло объем, например, гипершара, вписанного в единичный гиперкуб. В случае, если многомерное распределение не является равномерным, М-К будет сходиться, но не к истинному объему, а к какой-то другой величине.

Для интересующихся, есть расширенная версия исходной задачи:

Задача. Для произвольных n и k, где $k < n$, привести пример $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ — распределенные $U[0,1]$ случайные величины такие, что любые k из них совместно независимы, а любые $k+1$ — нет.

Доказать существование решения довольно просто, сложнее реализовать эффективный алгоритм генерации.

А какая у этой басни мораль? Совместные распределения случайных величин не описывают совместные распределения более высоких порядков

2.2 Coin

Рассмотрим следующую задачу:

Задача. По монете ударяют молотком, в результате она случайным образом изгибается и вероятность выпадения орла становится $p \sim U[0,1]$. Затем монету начинают подбрасывать. Найти:

1. вероятность того, что при одном броске выпадет орел;
2. вероятность того, что при двух бросках выпадет два орла;
3. распределение (sic) параметра p при условии, что в первом броске выпал орел;
4. распределение параметра p при условии, что в n бросаниях выпало m орлов и $n-m$ решек.

На первый вопрос ответ очевиден. 1/2. Почему? Ну, если не 1/2, вероятность одного из двух событий выше. А это невозможно, так как условие исходно симметрично.

На второй вопрос ответ может дать формула полной вероятности для непрерывного распределения. Сумма заменяется на интеграл и получаем:

$$P(\text{head}+\text{head}) = \int_{\mathsf{R}} P(\text{head}+\text{head} \mid p=x)\rho_p(x)\,dx = \int_0^1 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

На третий вопрос нам ответит непрерывная формула Байеса:

$$\rho_{p|\xi}(x \mid 1) = \frac{P(\xi=1 \mid p=x)\rho_p(x)}{\int \cdot},$$

где случайная величина ξ — результат броска монеты (1 — орел, 0 — решка).

В знаменателе стоит интеграл числителя, он нам не очень интересен, по сути, это просто нормировка (чтобы итоговая функция была плотностью). Если все аккуратно посчитать, получаем ответ:

$$\rho_{p|\xi}(x,1) = 2x.$$

Такое распределение относится к классу Бета-распределений:

$$\rho_{\mathcal{B}(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{\mathcal{B}(\alpha,\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}.$$

Конкретно мы получили $\mathcal{B}(2,1)$ (исходное, т.н. “априорное”, распределение p было $\mathcal{B}(1,1)$, равномерное).

На последний вопрос я предлагаю найти ответ самим. Хинт: надо выписать по формуле Байеса плотность:

$$\rho_{p|\xi_1,\xi_2,\ldots\xi_n}(x \mid \xi_1,\ldots,\xi_n),$$

где ξ_i результат i-го бросания монеты.

Предлагается промоделировать следующее. Сперва “согнем” монету, т.е. разыграем p на $U[0,1]$. Затем будем моделировать бросания монеты $\xi_1,\ldots$, каждый раз уточняя оценку апостериорного распределения неизвестно случайного параметра p. Изобразим на графике набор построенных плотностей и осмыслим результат.