

Курс: Математическая логика и теория вычислимости
Практика 1,2. Нормальные формы

(С)ДНФ и (С)КНФ

Разминка

- ▶ Построить ДНФ, КНФ, СДНФ и СКНФ для формулы $p \rightarrow q$.
- ▶ Представить формулу $p \wedge q$ в СКНФ.
- ▶ Построить СДНФ для формулы $p \vee q \wedge r$ с помощью эквивалентных преобразований.

Минимизация ДНФ

Длиной ДНФ называют число входящих в нее конъюнктов.

ДНФ называют *кратчайшей*, если она имеет наименьшую длину среди всех эквивалентных ей ДНФ.

ДНФ называют *минимальной*, если она содержит наименьшее число литералов среди всех эквивалентных ей ДНФ.

Элементарным произведением называется конъюнкт, в котором любая переменная встречается не более одного раза.

Формула A_0 называется *импликантой* формулы A , если A_0 — элементарное произведение и $A_0 \wedge A \leftrightarrow A_0$. Импликанта A_0 формулы A называется *простой*, если после отбрасывания любого литерала в A_0 получившаяся формула уже не является импликантой A .

- ▶ Построить все возможные импликанты для формулы $p \rightarrow q$ и выделить среди них простые.

Сокращенной ДНФ называется дизъюнкция всех простых импликант данной формулы.

- ▶ Построить сокращенную ДНФ для формулы $p \rightarrow q$

Если из сокращенной ДНФ удалить все лишние импликанты (не меняющие таблицы истинности), то получится *тушиковая ДНФ*.

Минимальная ДНФ ищется среди тушиковых.

Минимизация ДНФ методом Квайна

Определим три операции:

1. операция полного склеивания $A \wedge p \vee A \wedge \neg p \leftrightarrow A \wedge (p \vee \neg p) \leftrightarrow A$;

2. операция неполного склеивания: $A \wedge p \vee A \wedge \neg p \leftrightarrow A \vee A \wedge p \vee A \wedge \neg p$;
3. операция элементарного поглощения: $A \wedge p \vee A \leftrightarrow A$ или $A \wedge \neg p \vee A \leftrightarrow A$.

Теорема Квайна. Если исходя из СДНФ функции произвести все возможные операции неполного склеивания, а затем элементарного поглощения, то в результате получится сокращенная ДНФ, то есть дизъюнкция всех простых импликант.

- Построить сокращенную ДНФ для формулы
 $\neg p \wedge q \wedge \neg r \vee \neg p \wedge q \wedge r \vee p \wedge \neg q \wedge r \vee p \wedge q \wedge \neg r \vee p \wedge q \wedge r$

Для получения минимальной ДНФ из сокращенной ДНФ строят матрицу (таблицу) Квайна: в столбцах конstituенты единицы исходной совершенной ДНФ; в строках — простые импликанты получившиеся при построении сокращенной ДНФ. В матрице маркируются ячейки, для которых конъюнкт, стоящий в заголовке строки, входит в конstituенту единицы, являющейся заголовком столбца.

В тупиковую ДНФ выбирается минимальное число простых импликант, дизъюнкция которых сохраняет все конstituенты единицы. В качестве минимальной ДНФ выбирается тупиковая, которая имеет наименьшее число вхождений переменных.

- Постройте минимальную ДНФ для формулы
 $\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \vee \neg p \wedge \neg q \wedge r \vee p \wedge \neg q \wedge r \vee p \wedge q \wedge r$

- (ДЗ) Постройте минимальную ДНФ для формул

$$\neg p \wedge \neg q \wedge \neg r \vee \neg p \wedge \neg q \wedge r \vee \neg p \wedge q \wedge \neg r \vee \neg p \wedge q \wedge r \vee p \wedge q \wedge \neg r$$

$$\neg p \wedge \neg q \wedge r \wedge s \vee \neg p \wedge q \wedge r \wedge s \vee p \wedge \neg q \wedge r \wedge s \vee p \wedge q \wedge \neg r \wedge \neg s \vee p \wedge q \wedge \neg r \wedge s \vee p \wedge q \wedge r \wedge \neg s \vee p \wedge q \wedge r \wedge s$$

Полиномы Жегалкина

- Какая связка двойственна \oplus (сложению по модулю 2)?

Напомним, что для \oplus верны следующие эквивалентности

$$\neg A \leftrightarrow A \oplus 1$$

$$A \oplus A \leftrightarrow 0$$

$$A \vee B \leftrightarrow A \oplus B \oplus A \wedge B$$

$$A \wedge (B \oplus C) \leftrightarrow A \wedge B \oplus A \wedge C$$

- Постройте полиномы Жегалкина для формул

$$p \rightarrow q$$

$$p \leftrightarrow q$$

$$p \uparrow q$$

$$p \wedge \neg q \vee \neg p \wedge q \wedge \neg r$$

используя приведенные выше эквивалентности.

- Постройте полином Жегалкина для функции со следующей таблицей истинности, используя метод неопределенных коэффициентов.

p_1	p_2	p_3	f
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

Полные системы связок

- Докажите неполноту систем связок

$$(\oplus, \wedge)$$

$$(\wedge, \vee, \rightarrow)$$

$$(\neg)$$

- (ДЗ) Докажите полноту систем связок

$$(\oplus, \vee, 1)$$

$$(\rightarrow, 0)$$