Неравенства для энтропии.

28 марта 2017 г.

1 Неравенство о четверке (ДЗ)

Доделайте оставшиеся пунты и соберите из них доказательство следующего

Утверждение 1.1 *Если для случайных величин* a, b, x, y *выполняется*

$$\{ I\ (x : y \mid a) = 0, H(a \mid x, y) = 0,$$

то $I(a : b) \leq I(a : b \mid x) + I(a : b \mid y) + I(x : y)$.

Построим распределение (a', b', x', y') по (a, b, x, y). x', y' независимы при заданном a', b'. В остально все аналогично.

1. $H(a', b', x', y') = H(a, b) + H(x \mid a, b) + H(y \mid a, b)$.
2. $H(a', b', x', y') \leq H(b) + H(x \mid b) + H(y \mid b) + H(a' \mid x', y')$.
3. $H(a' \mid x', y') = 0$.
4. $H(a, b) + H(x \mid a, b) + H(y \mid a, b) \leq H(b) + H(x \mid b) + H(y \mid b)$.
5. Расписать предыдущее без условных энтропий.
6. Расписать через энтропии неравенство: $I(a : b) \leq I(a : b \mid x) + I(a : b \mid y) + I(x : y)$.
7. Доказать $H(x, y) \leq H(a) + H(x \mid a) + H(y \mid a)$.
8. Получить 6 из 5 и 7.

2 Другие задачи

Статистическим расстоянием между двумя распределениями вероятностей μ и v называется максимум по всем событиям A величины $|\mu(A) - v(A)|$.

Упражнение 2.1 *Докажите, что указанный максимум достигается и равен сумме половине суммы $\Sigma|\mu(x) - v(x)|$ (суммирование производится по всем исходам x). Статистическим расстоянием между случайными величинами на- зывается статистическое расстояние между их распределениями.*

Упражнение 2.2 *Пусть даны случайные величины α, β с n возможными исходами. Докажите, что $|H(\alpha) - H(\beta)| \leq d \log n + h(d, 1-d)$, где d обозначает статистическое расстояние между α, β, а $h(d, 1-d)$ есть энтропия Шеннона случайной величины с вероятностями исходов d и $1-d$.*

Упражнение 2.3 *Пусть энтропия случайно величины a равна n, а взаимная информация пар a и b, а также a и c больше $3n/4$. Докажите, что $I(b:c) > n/2$.*

Упражнение 2.4 *Случайные функции a и b принимают значения в 3-элементном множестве, и $a = b$ с вероятностью $2/3$. Докажите, что $H(a \mid b) \leq \frac{4}{3}$.*

3 Прошлые задачи, дорешать

Упражнение 3.1 *(а) Докажите, что код Шеннона–Фано является префиксным.*

(б) Докажите, что если центральный отрезок относить туда, куда попала его большая часть, то кодирование Шеннона–Фано не является сбалансированным (то есть не существует константы d, для которой выполнено $l(c_i) < -\log p_i + d$ для любых k и любых исходных вероятностей $p_1, ..., p_k$).

(в) Докажите, что если центральный отрезок всегда относить к правой половине, то кодирование Шеннона–Фано также не является сбалансированным