Домашнее задание №14

Группа 504

Количество баллов на зачёт: **5.5**

1. *(1.5 балла)* Доказать, что в любом графе G существует такое линейное упорядочение его вершин, при котором жадный алгоритм раскраски окрасит вершины графа ровно в $\chi(G)$ цветов.

2. *(1 балл)* Доказать, что для любого графа G, построенного на n вершинах, справедливо неравенство
$$\chi(G) \cdot \alpha(G) \geq n, \qquad n = |V(G)|,$$
где $\alpha(G)$ — количество вершин в максимальном вершинно независимом множестве графа G. Верно ли, что для любого k-хроматического графа можно найти такую правильную окраску его вершин в k цветов, что хотя бы одно из подмножеств одноцветных вершин имело мощность, равную $\alpha(G)$?

3. *(1 балл)* Доказать, что если $\chi(G - x - y) = \chi(G) - 2$ для любой пары вершин графа G, то G представляет собой полный граф, построенный на $n = \chi(G)$ вершинах.

4. *(1.5 балла)* Пусть l есть длина максимального пути в графе G. Доказать, что $\chi(G) \leq l$.

5. *(1 балл)* Доказать, что среди всех k-дольных графов, построенных на
$$n = t \cdot k + r, \qquad 0 \leq r \leq k - 1$$
вершинах, максимальное количество ребер имеет полный k-дольный граф G, в котором r блоков имеют $t + 1$ вершин, а в $n - r$ блоках содержатся t вершин.

6. *(2 балла)* Доказать, что простой граф G представляет собой полный k-дольный граф тогда и только тогда, когда не существует никакого индуцированного подграфа графа G, состоящего из трех вершин и одного ребра.