Домашнее задание (08.10.2014)

Количество баллов за каждую задачу указано в скобках после номера задачи. Решения можно сдавать в письменном виде до 15.10.2014. Можно присылать отсканированные рукописные решения на адрес m.vsemirnov@gmail.com с пометкой "Домашнее задание, 08.10.2014". Решения, оформленные в виде электронного документа (TeX, Word и т.п.) не принимаются.

Задача 1. [1] Пусть G — непустое множество с бинарной операцией $*$ на нем, причем выполнены следующие условия:
1) $\forall a, b, c \in G$ $[a * (b * c) = (a * b) * c]$;
2) $\exists e \in G \forall a \in G$ $[a * e = a]$;
3) $\forall a \in G \exists a' \in G$ $[a * a' = e]$;
Докажите, что $(G, *)$ является группой.

Задача 2. [2] Докажите, что для непустого множества G с ассоциативной бинарной операцией $*$ равносильны следующие условия
1) $(G, *)$ — группа;
2) для каждой пары a, b элементов из G каждое из уравнений $a*x = b$ и $y*a = b$ имеет единственное решение;
3) для каждой пары a, b элементов из G каждое из уравнений $a * x = b$ и $y * a = b$ имеет по крайней мере одно решение.

Задача 3. [1] Пусть $(G, \cdot)$ — группа, и a — некоторый фиксированный элемент G. Определим новую операцию $*$ на G по правилу $x * y = x \cdot a \cdot y$. Докажите, что $(G, *)$ группа, причем группы $(G, \cdot)$ и $(G, *)$ изоморфны.

Задача 4. [1] Пусть M — непустое множество с ассоциативной бинарной операцией $*$. Пусть для каждого элемента a из M существуют такие элементы e и a' из M, что $e * a = a * e = a$, $a * a' = a' * a = e$. Верно ли, что $(M, *)$ — группа?

Задача 5. [1] Пусть M — некоторое множество, а $P(M)$ — множество всех его подмножеств. Введем на $P(M)$ операцию Δ:

$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

1) Докажите, что $(P(M), \Delta)$ — абелева группа.
2) Решите уравнения $A \Delta X = B$, $X \Delta A = B$ (X является неизвестным).
3) Докажите, что каждый элемент в этой группе, отличный от нейтрального, имеет порядок 2.

Задача 6. [1] Пусть все элементы группы, кроме нейтрального, имеют порядок 2. Докажите, что группа абелева.

Задача 7. [2] Пусть G — множество пар (a, b), $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$. Определим операцию на G по правилу

$$(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2, a_1 b_2 + b_1).$$

1) Докажите, что G с этой операцией является группой.
2) Найдите в G две подгруппы, такие, что первая из них изоморфна $(\mathbb{R}, +)$, а вторая изоморфна $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.
3) Найдите в G все элементы порядка 2. Есть ли в G элементы конечных порядков, отличных от 1 и 2?
4) Докажите, что линейные (непостоянные) функции на $\mathbb{R}$ относительно операции композиции образуют группу, изоморфную группе G.

Задача 8. [1] Пусть M — некоторое множество, $A \subseteq M$, а $f, g : M \to M$, причем $g(A) \subseteq A$. Докажите, что $(f \circ g)|_A = f|_A \circ g|_A$.

Задача 9. [1] 1) Найдите порядок группы движений и отражений трехмерного пространства, совмещающих с собой куб.
2) Найдите порядок группы движений (без отражений) трехмерного пространства, совмещающих с собой куб. Докажите, что эта группа изоморфна S_4.

Задача 10. [1] Пусть $M = \mathbb{R} \setminus 0, 1$. Рассмотрим множество, состоящее из 6 отображений из M в M:

$$x \mapsto x,\ x \mapsto \frac{1}{1-x},\ x \mapsto \frac{x-1}{x},\ x \mapsto \frac{1}{x},\ x \mapsto \frac{x}{x-1},\ x \mapsto 1-x.$$

Докажите, что это множество с операцией композиции образует группу, изоморфную S_3.

Задача 11. [1] Установите изоморфизм группы вещественных чисел относительно сложения и группы положительных вещественных чисел относительно умножения.

Задача 12. [2] (повторение) Пусть A_n — группа четных перестановок, $n \geq 3$ Докажите, что A_n порождается:
1) циклами $(1, 2, 3)$, $(1, 2, 4)$,...,$(1, 2, n)$;
2) циклами $(1, 2, 3)$ и $(1, 2, \ldots, n)$, если n нечетно;
3) циклами $(1, 2, 3)$ и $(2, 3, \ldots, n)$, если n четно;