

Функция называется мероморфной в области  $D$ , если она не имеет в этой области особых точек, отличных от полюсов (т.е. для любой точки  $z = a$  такой что  $f$  регулярна в кольце  $0 < |z - a| < \rho$ , но не определена в  $z = a$  предел  $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$  существует и бесконечен).

Функция  $f(z)$  называется однолистной на множестве  $E$ , если она принимает различные значения в любых двух различных точках  $E$ .

Конформным отображением области  $D$  расширенной комплексной плоскости (т.е. с добавленной  $\infty$ ) называется отображение, совершаемое функцией, мероморфной и однолистной в области  $D$ .

Конформное отображение сохраняет углы.

**Линейное отображение.**  $w = az + b, a, b \in \mathbb{C}$ . Конформно во всей плоскости.  $|a|$  отвечает за растяжение,  $\arg a$  за поворот,  $b$  за перенос.

1. Найдите образ оси при отображении  $w = 2iz - 3i$ .

2. Найдите отображение, переводящее  $|z - i| = 1$  в  $|w - 3| = 2$ .

**Дробно-линейные отображения.**  $w(z) = \frac{az+b}{cz+d}, ad-bc \neq 0$ , где  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ . Свойство д-л отображений: конформность, групповое свойство, прямые и окружности переходят в прямые (если исходный объект содержал точку  $-\frac{d}{c}$ ) и окружности.

1. Найдите образы следующих линий при отображении  $w = \frac{1}{z}$ : ось  $Oy$ , прямая  $y = x$ , прямая  $y = 2$ , окружность  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ .

2. Найдите образы следующих линий при отображении  $w = \frac{z+i}{z-2i}$ : прямая  $y = x$ , прямая  $y = x + 2$ , окружность  $x^2 + (y - 4)^2 = 1$ , окружность  $x^2 + (y - 1)^2 = 1$ .

3. Найдите образ области  $D = \overline{\mathbb{C}} \setminus \{z : |z - 1| \leq 1, |z - i| \leq 1\}$  при отображении  $w = \frac{1}{z}$ .

4. Найдите образ полуплоскости  $\operatorname{Re} z < 1$  при отображении  $w_1 = (1 + i)z + 1, w_2 = \frac{z}{z-2}$ .

**Экспоненциальная функция.**  $e^z = e^x(\cos y + i \sin y), z = x + iy$ . Непрерывна и периодическая с периодом  $2\pi i$ .

1. Каковы условия однолистности экспоненты на множестве  $G$ ?

Каковы образы

2. Полосы  $G = \{z | -\pi < \operatorname{Im} z < \pi\}$ ?

3. Полосы  $G = \{z | 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ ?

4. Полуполосы  $G = \{z | \operatorname{Re} z < 0, 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ ?

5. Полуполосы  $G = \{z | \operatorname{Re} z > 0, 0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$ ?

**Степенная функция.**  $w = z^n, n \in \mathbb{N}$ . Напоминание: формула Муавра  $z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ . В комплекте с формулой Эйлера получим  $z = |z|e^{i\varphi}, z^n = |z|^n e^{in\varphi}$ .

1. Каковы условия однолистности степенной функции на множестве  $G$ ?

2. Найдите образ при отображении  $w = z^2$  областей  $D_1 = \{z | |z| > 0, 0 < \arg z < \pi/6\}, D_2 = \{z | \operatorname{Im} z > 0\}, D_3 = \{z | |z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}, D_4 = \{z | \operatorname{Im} z > 1\}$ .

3. Найдите образ при отображении  $w = z^4$  области  $D = \{z | |z| = 2, \pi/8 < \arg z < \pi/4\}$ .

**Функция Жуковского.**  $w = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$  осуществляет конформное отображение области  $D \subset \overline{\mathbb{C}}$  тогда и только тогда, когда точки  $\pm 1$  не принадлежат  $D$  и для любой точки  $z \in D$  точка  $\frac{1}{z} \notin D$ .

1. Примеры таких областей?

Представим ФЖ в полярной форме  $w = \frac{1}{2}(re^{i\varphi} + \frac{1}{r}e^{-i\varphi}) = u + iv$ , где

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2}(r + \frac{1}{r}) \cos \varphi, \\ v = \frac{1}{2}(r - \frac{1}{r}) \sin \varphi. \end{cases}$$

Найдите образ при отображении функцией Жуковского областей:

1. Окружность с центром в нуле и радиусом меньше (больше) единицы.

\* А куда переводятся круги?

2. Луч  $\lambda_{\varphi_0} = \{z | z = te^{i\varphi_0}, 0 < t < \infty\}, \varphi_0 \in [0; 2\pi)$ .

3. Круг  $|z| < 1$ .

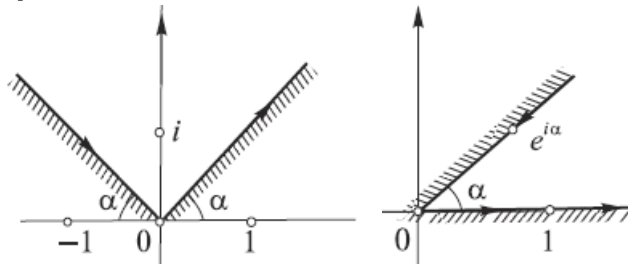
4. Внешность круга  $|z| > 1$ .

5. Верхняя полуплоскость.

6. Область  $D = \{z | \operatorname{Im} z > 0, |z| > 1\}$ .

7. Полуокруг  $D = \{z | \operatorname{Im} z < 0, |z| < 1\}$ .

8. Угловые области



**Тригонометрические и гиперболические функции** можно представить композицией уже указанных.

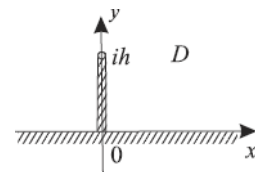
1. Докажите, что условием однолиственности функции  $w = \sin z$  в области  $D$  является отсутствие в ней точек  $z_1$  и  $z_2$ , таких что  $z_1 = z_2 + 2\pi k$ , либо  $z_1 + z_2 = \pi + 2\pi k$ .

2. Во что отображает синус полуполосу  $\operatorname{Re} z \in (-\pi/2; \pi/2), \operatorname{Im} z > 0$ ?

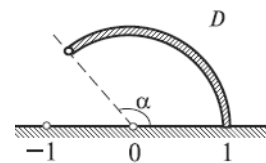
3. Композицией каких отображений является тангенс? Куда он переводит полосу  $\operatorname{Re} z \in (-\pi/4; \pi/4)$ ?

**Поиск отображений.**

1. Какое конформное отображение переводит область  $D$ , являющуюся верхней полуплоскостью  $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$  с разрезом по отрезку  $[0, ih]$ , где  $h > 0$ , в верхнюю полуплоскость ( $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ )?



2. Какое конформное отображение переводит область  $D$ , являющуюся верхней полуплоскостью  $\{z : \operatorname{Im} z > 0\}$  с разрезом по дуге окружности  $\{z : |z| = 1, 0 \leq \arg z \leq \alpha\}$ , где  $0 < \alpha < \pi$  в верхнюю полуплоскость?



3. Какое конформное отображение переводит область  $D = \{z : \operatorname{Re} z > 0, |z - 1| > 1\} \setminus [2, 3]$  в верхнюю полуплоскость?

