Стабилизаторы, нормальные подгруппы и связанные определения

Это домашнее задание посвящено работе со стабилизаторами, а так же понятию нормальной подгруппы и его пользе в народном хозяйстве.

Для начала набор фактов с прошедшей пары.

Факт. Чётность перестановки равна $(-1)^{\text{количество циклов чётной длины в цикловой записи}}$.

Определение 1. *Пусть G-группа, действующая на множестве X. Тогда X называется однородным пространством, если $\exists x \in X$, такой что $X = O_x$.*

Замечание. Если X-однородное пространство, то орбита любого элемента будет равна всему X.

На всякий случай дам определения изоморфизма G-множеств.

Определение 2. *Отображение f между двумя G-множества X_1 и X_2 называется изоморфизмом, если оно биективно и*

$$\forall g \in G, x \in X_1\, f(gx) = gf(x).$$

Замечание. Обратное отображение автоматически будет изоморфизмом G-множеств.

Определение 3. *Пусть задана группа G и её подгруппа H. Определим действие группы G на левых смежных классах G/H следующей формулой*

$$g_1 \cdot g_2 H = g_1 g_2 H.$$

Замечание. Несложно понять, что G/H относительно введённого действия является однородным пространством. Стабилизатором класса eH является сама подгруппа H (Таким образом любая подгруппа есть стабилизатор какой-то точки в некотором однородном пространстве). На самом деле, других однородных пространств не бывает.

Теорема 1. *Важная теорема гласит, что $|G| = |O_x||Stab_x|$. Причём каждому элементу y из O_x можно сопоставить множество всех $\{g \in G \,|\, gx = y\}$, которое совпадает с некоторым левым смежным классом по подгруппе $Stab_x$ (А множество $\{g \in G \,|\, x = gy\}$ будет правым смежным классом по $Stab_x$). Указанное соответствие задаёт изоморфизм между множеством левых смежных классов $G/Stab_x$ и орбитой O_x, как G-множествами. Этот изоморфизм зависит от изначального выбора точки x.*

Замечание. Так как однородное пространство состоит из одной орбиты, то получаем, что оно изоморфно $G/Stab_x$ для какой угодно точки x из этого пространства.

Таким образом исследование подгрупп группы G свелось к исследованию всех однородных пространств (и наоборот).

Определение 4. *Подгруппа H группы G называется нормальной, если для любого $g \in G$ верно, что $gHg^{-1} = H$. Этот факт будем обозначать $H \trianglelefteq G$.*

Факт. Ядро любого гомоморфизма $f: G \to G'$ является нормальной подгруппой в G. Обратно, любая нормальная подгруппа H есть ядро отображения факторизации $G \to G/H$.

Замечание. Для того, чтобы на G/H можно было ввести структуру группы так, чтобы естественное отображение $G \to G/H$ было гомоморфизмом групп, необходимо и достаточно, чтобы подгруппа H была нормальна в группе G.

Теорема 2. *Пусть имеется гомоморфизм групп $f: G \to G'$. Тогда образ этого гомоморфизма можно описать в терминах группы G, а именно*

$$\mathrm{Im}_f \cong G/\operatorname{Ker}_f$$

Отображение посылает каждый элемент $y \in \mathrm{Im}_f$ в $f^{-1}(y)$. Оказывается, $f^{-1}(y)$ это какой-то смежный класс по подгруппе Ker_f

Замечание. Это утверждение может быть полезно, так как описывает часть группы G' в терминах группы G и, наоборот, даёт информацию о группе G, если много известно про G'.

Замечание. Если отображение f сюръекция, то получается, что группа G' целиком описывается в терминах факторгруппы. В частности, верна формула

$$|G| = |G'| \cdot |\operatorname{Ker}_f|.$$

Задачи

Следующая задача имеет прямое отношение к доказательству "важной теоремы".

Задание 1. Пусть группа G действует на множестве X. Покажите, что стабилизаторы двух элементов x, y, находящихся в одной орбите, сопряжены.

Задание 2. Пусть группа G действует на множестве X. Рассмотрим некоторый элемент $x \in X$. Покажите, что $\bigcap_{y \in O_x} Stab_y$ есть нормальная подгруппа.

Задание 3. Верно ли, что пересечение двух нормальных подгрупп — нормальная подгруппа? Ответ обоснуйте.

Задание 4. Пусть H нормальная подгруппа индекса n в группе G. Покажите, что для любого $g \in G$ выполнено, что $g^n \in H$.

Задание 5. Покажите, что подгруппа индекса 2 всегда нормальная подгруппа.

Задание 6. Покажите, что A_n есть единственная подгруппа индекса 2 в S_n. Приведите пример группы с, по крайней мере, двумя различными подгруппами индекса 2.

Задание 7. Покажите, что нормальная подгруппа в группе G есть дизъюнктное объединение некоторых классов сопряжённости группы G.

Задание 8. Покажите, что в S_4 нет нормальных подгрупп кроме

$$\{id\},\ S_4,\ A_4,\ V_4 = \{id, (1\,2)(3\,4), (1\,3)(2\,4), (1\,4)(2\,3)\}.$$

Задание 9. Покажите, что $S_4/V_4 \cong S_3$.

Задание 10. Покажите, что множество G аффинных преобразований вещественной прямой $G = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, f(x) = ax + b,\ a, b \in \mathbb{R},\ a \neq 0\}$, является группой относительно композиции. Покажите, что подгруппа сдвигов $H = \{f \in G \,|\, f(x) = x + b\}$, является нормальной подгруппой. Вычислите фактор G/H.

Необязательные задачи

Следующие задачи посвящены понятию полупрямого произведения групп, частным случаем которого является обычное произведение групп. Полупрямое произведение во многих случаях позволяет явно восстановить группу из кусочков (подгрупп). В этих задачах по баллу начисляется за каждый пункт.

Определение 5. *Пусть G_1 и G_2 две группы. Более того, пусть задан гомоморфизм $\phi\colon G_2 \to \mathrm{Aut}(G_1)$. Определим на множестве $G_1 \times G_2$ операцию $\cdot_\phi$ следующим образом*

$$(g_1, g_2) \cdot_\phi (h_1, h_2) = (g_1 \cdot \phi(g_2)(h_1), g_2 \cdot h_2).$$

Такая конструкция называется полупрямым произведением G_1 и G_2 и обозначается как $G_1 \rtimes G_2$ (информация про ϕ в обозначении обычно опускается).

Задание 11. Покажите, что
а) $G_1 \times G_2$ действительно группа;
б) отображение $i_1\colon G_1 \to G_1 \rtimes G_2$, заданное как $i_1(g) = (g, 1)$, является гомоморфизмом групп. Причём образ i_1 есть нормальная подгруппа.
в) отображение $i_2\colon G_2 \to G_1 \rtimes G_2$, заданное как $i_2(h) = (1, h)$, является гомоморфизмом групп.

Задание 12. (3 балла) Пусть H_1 нормальная подгруппа в G и существует подгруппа H_2 в G, такая что $H_1 \cap H_2 = \varnothing$ и $H_1 H_2 = G$(то есть наименьшая подгруппа содержащая H_1 и H_2). Покажите, что G изоморфна полупрямому произведению $H_1 \rtimes H_2$ (какой взять гомоморфизм в группу $\mathrm{Aut}(H_1)$ решать вам).

Задание 13. Используя предыдущие задачи покажите, что
а) $S_n \cong A_n \rtimes \mathbb{Z}/2$;
б) $D_n \cong \mathbb{Z}/n \rtimes Z/2$;
в) $S_4 \cong V_4 \rtimes S_3$;
г) $A_4 \cong V_4 \rtimes \mathbb{Z}/3$.
д) $h = (123) \cdots (3n-2\, 3n-1\, 3n) \in S_{3n}$, тогда $Stab_h \cong (\mathbb{Z}/3)^n \rtimes S_n$ при действии S_{3n} на себе сопряжениями.
е) Опишите стабилизатор любой перестановки $h \in S_n$ в терминах полупрямого произведения.
ё) Представьте группу аффинных преобразований прямой как полупрямое произведение абелевых групп.