Курс: Функциональное программирование

Лекция 2. Рекурсия. Редукция.

Денис Николаевич Москвин

23.09.2011

Кафедра математических и информационных технологий
Санкт-Петербургского академического университета

План лекции

- Теорема о неподвижной точке
- Редексы и нормальная форма
- Теорема Чёрча-Россера
- Стратегии редукции

План лекции

- Теорема о неподвижной точке
- Редексы и нормальная форма
- Теорема Чёрча-Россера
- Стратегии редукции

Термовые уравнения

Схема β-преобразования $(\lambda x.\, M)\, N \;=\; M[x := N]$ даёт возможность решать простейшие уравнения на термы.

Пример: найти F, такой что $\forall M, N, L \;\; \lambda \vdash F\, M\, N\, L = M\, L\, (N\, L)$.

$$
\begin{aligned}
&F\, M\, N\, L = M\, L\, (N\, L)\\
&F\, M\, N = \lambda z.\, M\, z\, (N\, z)\\
&F\, M = \lambda y.\, \lambda z.\, M\, z\, (y\, z)\\
&F = \lambda x\, y\, z.\, x\, z\, (y\, z)
\end{aligned}
$$

А если уравнение рекурсивное, например, $F\, M = M\, F$?

Теорема неподвижной точки (1)

Теорема. Для любого λ-терма F существует неподвижная точка:

$$\forall F \in \Lambda \quad \exists X \in \Lambda \qquad \lambda \vdash F\,X = X$$

Док-во. Введем $W \equiv \lambda x.\, F\,(x\,x)$ и $X \equiv W\,W$. Тогда

$$X \equiv W\,W \equiv (\lambda x.\, F(x\,x))\,W = F\,(W\,W) \equiv F\,X \quad \blacksquare$$

Теорема. Существует комбинатор неподвижной точки

$$\mathbf{Y} \equiv \lambda f.\, (\lambda x.\, f\,(x\,x))(\lambda x.\, f\,(x\,x)),$$

такой что $\forall F \quad F(\mathbf{Y}\,F) = \mathbf{Y}\,F$.

Док-во. $\mathbf{Y}\,F \equiv (\lambda x.\, F\,(x\,x))(\lambda x.\, F\,(x\,x)) = F\,(\underbrace{(\lambda x.\, F\,(x\,x))(\lambda x.\, F\,(x\,x))}_{\mathbf{Y}\,F}) \equiv$ $F(\mathbf{Y}\,F) \quad \blacksquare$

Теорема неподвижной точки (2)

$\mathbf{Y}$-комбинатор позволяет ввести рекурсию в λ-исчисление.

Факториал рекурсивно:

$$\mathsf{fac} = \lambda n.\, \mathsf{iif}\,(\mathsf{iszro}\ n)\ 1\ (\mathsf{mult}\ n\,(\mathsf{fac}\,(\mathsf{pred}\ n)))$$

Переписываем в виде

$$\mathsf{fac} = \underbrace{(\lambda f\, n.\, \mathsf{iif}\,(\mathsf{iszro}\ n)\ 1\ (\mathsf{mult}\ n\,(f\,(\mathsf{pred}\ n))))}_{\mathsf{fac}'}\ \mathsf{fac}$$

Отсюда видно, что fac — неподвижная точка для вспомогательной функции fac':

$$\mathsf{fac} = \mathbf{Y}\ \mathsf{fac}'$$

Теорема неподвижной точки (3)

Как работает $\mathsf{fac} \equiv \mathbf{Y}\,\mathsf{fac}'$?

$$
\begin{aligned}
\mathsf{fac}\ 3 &= (\mathbf{Y}\,\mathsf{fac}')\,3 \\
&= \mathsf{fac}'\,(\mathbf{Y}\,\mathsf{fac}')\,3 \\
&= \mathsf{iif}\,(\mathsf{iszro}\ 3)\ \mathsf{1}\ (\mathsf{mult}\ 3\,((\mathbf{Y}\,\mathsf{fac}')\,(\mathsf{pred}\ 3))) \\
&= \mathsf{mult}\ 3\,((\mathbf{Y}\,\mathsf{fac}')\,2) \\
&= \mathsf{mult}\ 3\,(\mathrm{F}\,(\mathbf{Y}\,\mathsf{fac}')\,2) \\
&= \mathsf{mult}\ 3\,(\mathsf{mult}\ 2\,((\mathbf{Y}\,\mathsf{fac}')\,1)) \\
&= \mathsf{mult}\ 3\,(\mathsf{mult}\ 2\,(\mathsf{mult}\ \mathsf{1}\,((\mathbf{Y}\,\mathsf{fac}')\,0))) \\
&= \mathsf{mult}\ 3\,(\mathsf{mult}\ 2\,(\mathsf{mult}\ \mathsf{1}\ \mathsf{1})) \\
&= 6
\end{aligned}
$$

План лекции

- Теорема о неподвижной точке
- Редексы и нормальная форма
- Теорема Чёрча-Россера
- Стратегии редукции

Асимметрия β-конверсии

Мы строили λ-исчисление как теорию о равенстве термов.
А как доказать неравенство?

Рассмотрим примеры:

$$
\begin{aligned}
\mathbf{K}\ \mathbf{I} &\equiv (\lambda x y.\, x)\,(\lambda z.\, z) = \lambda y z.\, z \\
\mathbf{I}\ \mathbf{I}\ \mathbf{K}_* &\equiv (\lambda x.\, x)\ \mathbf{I}\ \mathbf{K}_* = \mathbf{I}\ \mathbf{K}_* \equiv (\lambda x.\, x)\,(\lambda y z.\, z) = \lambda y z.\, z
\end{aligned}
$$

Видно, что процесс носит односторонний характер: термы при конверсиях «упрощаются». Для исследования подобного вычислительного аспекта вводят понятие ***редукции***:

- $\mathbf{K}\ \mathbf{I} \to_\beta \mathbf{K}_*$ — редуцируется за один шаг;
- $\mathbf{I}\ \mathbf{I}\ \mathbf{K}_* \twoheadrightarrow_\beta \mathbf{K}_*$ — редуцируется;
- $\mathbf{K}\ \mathbf{I} =_\beta \mathbf{I}\ \mathbf{I}\ \mathbf{K}_*$ — конвертируемо (равно).

Редексы

Терм вида $(\lambda x.\, M)\, N$ называется β-***редексом***.

Терм $M[x := N]$ называется его ***сокращением***.

Например, терм $\mathbf{I}\ (\mathbf{K}\ \mathbf{I})$ содержит два редекса

$$(\lambda x.\, x)\, ((\lambda y\, z.\, y)\, (\lambda p.\, p))$$
$$(\lambda x.\, x)\, ((\lambda y\, z.\, y)\, (\lambda p.\, p))$$

Может ли сокращение увеличить число редексов?

Понятие редукции

1. Бинарное отношение $\mathcal{R}$ над Λ называют ***совместимым*** (с операциями λ-исчисления), если

$$
\begin{aligned}
M \ \mathcal{R} \ N \ \Rightarrow \ & (Z\,M) \ \mathcal{R} \ (Z\,N), \\
& (M\,Z) \ \mathcal{R} \ (N\,Z), \\
& (\lambda x\,.\,M) \ \mathcal{R} \ (\lambda x\,.\,N).
\end{aligned}
$$

   для любых $M, N, Z \in \Lambda$.

2. Совместимое отношение эквивалентности называют отношением ***конгруэнтности*** над Λ.

3. Совместимое, рефлексивное и транзитивное отношение называют отношением ***редукции*** над Λ.

Редукция за один шаг $\to_\beta$

Бинарное отношение β-***редукции за один шаг*** $\to_\beta$ над Λ:

$$
\begin{array}{rcl}
(\lambda x.\, M)\, N & \to_\beta & M[x := N] \\
M \to_\beta N & \Rightarrow & Z\, M \to_\beta Z\, N \\
M \to_\beta N & \Rightarrow & M\, Z \to_\beta N\, Z \\
M \to_\beta N & \Rightarrow & \lambda x.\, M \to_\beta \lambda x.\, N
\end{array}
$$

Примеры:

$$
(\lambda x.\, x)\, ((\lambda\, y\, z.\, y)\, (\lambda\, p.\, p)) \;\to_\beta\; (\lambda\, y\, z.\, y)\, (\lambda\, p.\, p) \;\to_\beta\; \lambda\, z\, p.\, p
$$

$$
(\lambda x.\, x)\, ((\lambda\, y\, z.\, y)\, (\lambda\, p.\, p)) \;\to_\beta\; (\lambda x.\, x)\, (\lambda\, z\, p.\, p) \;\to_\beta\; \lambda\, z\, p.\, p
$$

По определению $\to_\beta$ является совместимым (с операциями λ-исчисления).

Многошаговая редукция $\twoheadrightarrow_\beta$

Бинарное отношение β-***редукции*** $\twoheadrightarrow_\beta$ над Λ определяется индуктивно:

$$\begin{array}{rl}
(a) & M \twoheadrightarrow_\beta M \\
(b) & M \rightarrow_\beta N \;\Rightarrow\; M \twoheadrightarrow_\beta N \\
(c) & M \twoheadrightarrow_\beta N, N \twoheadrightarrow_\beta L \;\Rightarrow\; M \twoheadrightarrow_\beta L
\end{array}$$

Примеры:

$$\begin{array}{lll}
(\lambda x.\, x)\,((\lambda y\, z.\, y)\,(\lambda p.\, p)) & \twoheadrightarrow_\beta & (\lambda x.\, x)\,((\lambda y\, z.\, y)\,(\lambda p.\, p)) \\
(\lambda x.\, x)\,((\lambda y\, z.\, y)\,(\lambda p.\, p)) & \twoheadrightarrow_\beta & (\lambda y\, z.\, y)\,(\lambda p.\, p) \\
(\lambda x.\, x)\,((\lambda y\, z.\, y)\,(\lambda p.\, p)) & \twoheadrightarrow_\beta & \lambda z\, p.\, p
\end{array}$$

Отношение $\twoheadrightarrow_\beta$ является транзитивным рефлексивным замыканием $\rightarrow_\beta$ и, следовательно, отношением редукции.

Отношение конвертируемости $=_\beta$ (1)

Бинарное отношение $=_\beta$ над Λ определяются индуктивно:

$$
\begin{array}{ll}
(a) & M \twoheadrightarrow_\beta N \;\Rightarrow\; M =_\beta N \\
(b) & M =_\beta N \;\Rightarrow\; N =_\beta M \\
(c) & M =_\beta N, N =_\beta L \;\Rightarrow\; M =_\beta L
\end{array}
$$

Отношение $=_\beta$ является отношением конгруэнтности.

Утверждение. $M =_\beta N \quad \Leftrightarrow \quad \lambda \vdash M = N$.

Отношение конвертируемости $=_\beta$ (2)

Интуитивно: два терма M и N связаны отношением $=_\beta$, если есть связывающая их цепочка $\to_\beta$-стрелок:

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[dr] & & & & & & & \\
& \bullet \arrow[dr] & & \bullet \arrow[dl] \arrow[dr] & & & & N \arrow[dl] \\
& & \bullet & & \bullet \arrow[dr] & & \bullet \arrow[dl] & \\
& & & & & \bullet & &
\end{tikzcd}
$$

Пример. $\mathbf{K}\ \mathbf{I}\ =_\beta\ \mathbf{I}\ \mathbf{I}\ \mathbf{K}_*$:

$$
\begin{tikzcd}
& & & \mathbf{I}\ \mathbf{I}\ \mathbf{K}_* \arrow[dl] \\
\mathbf{K}\ \mathbf{I} \arrow[dr] & & \mathbf{I}\ \mathbf{K}_* \arrow[dl] & \\
& \mathbf{K}_* & &
\end{tikzcd}
$$

Нормальная форма (1)

- λ-терм M находится в β-***нормальной форме*** (β-NF), если в нем нет подтермов, являющихся β-редексами.

- λ-терм M имеет β-нормальную форму, если для некоторого N выполняется $M =_\beta N$ и N находится в β-nf.

Терм $\lambda x\, y.\, y\,(\lambda z.\, x)$ находится в β-нормальной форме.

Терм $(\lambda x.\, x\, x)\, y$ не находится в β-нормальной форме, но имеет в качестве β-nf терм $y\, y$.

Нормальная форма (2)

Не все термы имеют β-нормальную форму:

$$
\begin{array}{rcl}
\mathbf{\Omega} & \equiv & \omega\,\omega \\
& \equiv & (\lambda x.\, x\, x)\,(\lambda x.\, x\, x) \\
& \to_\beta & (\lambda x.\, x\, x)\,(\lambda x.\, x\, x) \\
& \to_\beta & \ldots
\end{array}
$$

Это пока не доказательство! Может быть существует терм N в β-nf, такой что $\mathbf{\Omega} =_\beta N$, например, так

$$
\begin{tikzcd}
& M \arrow[dl, two heads] \arrow[dr, two heads] & \\
\mathbf{\Omega} & & N
\end{tikzcd}
$$

Нормальная форма (3)

Бывают термы, «удлинняющиеся» при редукции:

$$\begin{array}{rcl}
\mathbf{\Omega_3} & \equiv & \omega_3\,\omega_3 \\
& \equiv & (\lambda x.\, x\,x\,x)\,(\lambda x.\, x\,x\,x) \\
& \to_\beta & (\lambda x.\, x\,x\,x)\,(\lambda x.\, x\,x\,x)\,(\lambda x.\, x\,x\,x) \\
& \to_\beta & (\lambda x.\, x\,x\,x)\,(\lambda x.\, x\,x\,x)\,(\lambda x.\, x\,x\,x)\,(\lambda x.\, x\,x\,x) \\
& \to_\beta & \ldots
\end{array}$$

С какой скоростью будет расти $\mathbf{\Omega_4} \equiv \omega_4\,\omega_4$?

Нормальная форма (4)

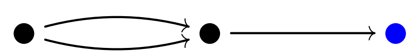
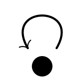
Не все последовательности редукций приводят β-нормальной форме:

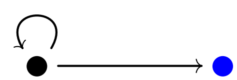
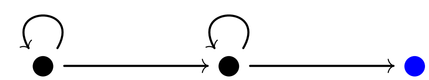
$$
\begin{array}{rcl}
\mathbf{K}\,\mathbf{I}\,\mathbf{\Omega} & \equiv & \mathbf{K}\,\mathbf{I}\,((\lambda x.\,x\,x)\,(\lambda x.\,x\,x)) \\
 & \to_\beta & \mathbf{K}\,\mathbf{I}\,((\lambda x.\,x\,x)\,(\lambda x.\,x\,x)) \\
 & \to_\beta & \ldots \\
\mathbf{K}\,\mathbf{I}\,\mathbf{\Omega} & \equiv & (\lambda x\,y.\,x)\,\mathbf{I}\,\mathbf{\Omega} \\
 & \to_\beta & (\lambda y.\,\mathbf{I})\,\mathbf{\Omega} \\
 & \to_\beta & \mathbf{I}
\end{array}
$$

(синим отмечен сокращаемый редекс)

Редукционные графы (1)

Редукционный граф терма $M \in \Lambda$, обозначаемый $G_\beta(M)$, — это ориентированный мультиграф с вершинами в $\{N \mid M \twoheadrightarrow_\beta N\}$ и дугами $\to_\beta$.

$G_\beta\,(\mathbf{I}\,(\mathbf{I}\,x)) \;=$  $\qquad G_\beta\,(\boldsymbol{\Omega}) \;=$ 

$G_\beta\,((\lambda x.\,\mathbf{I})\,\boldsymbol{\Omega}) \;=$  $\qquad G_\beta\,(\mathbf{K}\,\mathbf{I}\,\boldsymbol{\Omega}) \;=$ 

$G_\beta\,(\boldsymbol{\Omega_3}) \;=\; ???$ $\qquad G_\beta\,((\lambda x.\,\mathbf{I})\,\boldsymbol{\Omega_3}) \;=\; ???$

Редукционные графы (2)

$$G_\beta\,(\mathbf{\Omega_3}) \;=\; \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \bullet \longrightarrow \ldots$$

Не все редукционные графы конечны.

$$G_\beta\,((\lambda x.\,\mathbf{I})\,\mathbf{\Omega_3}) \;=\; \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[dl] & \bullet \arrow[r] \arrow[dll] & \bullet \arrow[r] \arrow[dlll] & \ldots \\ \bullet & & & & \end{tikzcd}$$

Не все бесконечные редукционные графы не имеют нормальной формы.

План лекции

- Теорема о неподвижной точке
- Редексы и нормальная форма
- Теорема Чёрча-Россера
- Стратегии редукции

Теорема Чёрча-Россера

Теорема. [Чёрч-Россер] Если $M \twoheadrightarrow_\beta N$, $M \twoheadrightarrow_\beta K$, то существует L, такой что $N \twoheadrightarrow_\beta L$ и $K \twoheadrightarrow_\beta L$.

Иначе говоря, β-редукция обладает ***свойством ромба***:

$$
\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dl, two heads] \arrow[dr, two heads] & \\
N \arrow[dr, two heads, dotted] & & K \arrow[dl, two heads, dotted] \\
 & L &
\end{tikzcd}
$$

Иногда используют термин ***сходимость***.

Следствия теоремы Чёрча-Россера (1)

Существование общего редукта. Если $M =_\beta N$, то существует L, такой что, $M \twoheadrightarrow_\beta L$ и $N \twoheadrightarrow_\beta L$.

Доказательство. Индукция по генерации $=_\beta$.
Случай 1. $M =_\beta N$, поскольку $M \twoheadrightarrow_\beta N$. Возьмем $L \equiv N$.
Случай 2. $M =_\beta N$, поскольку $N =_\beta M$. По гипотезе индукции имеется общий β-редукт L_1 для N, M. Возьмем $L \equiv L_1$.
Случай 3. $M =_\beta N$, поскольку $M =_\beta N'$, $N' =_\beta N$. Тогда

$$
\begin{tikzcd}
M \arrow[dr, two heads] \arrow[rr, phantom, "(\mathrm{IH})"] & & N' \arrow[dl, two heads] \arrow[dr, two heads] \arrow[rr, phantom, "(\mathrm{IH})"] & & N \arrow[dl, two heads] \\
& L_1 \arrow[dr, dotted, two heads] \arrow[rr, phantom, "\mathrm{CR}"] & & L_2 \arrow[dl, dotted, two heads] & \\
& & L & &
\end{tikzcd}
$$

Следствия теоремы Чёрча-Россера (2)

Редуцируемость к NF. Если M имеет N в качестве β-nf, то $M \twoheadrightarrow_\beta N$.

Теперь мы можем доказать отсутствие NF у $\boldsymbol{\Omega}$. Иначе выполнялось бы

$$\boldsymbol{\Omega} \twoheadrightarrow_\beta N, \qquad N \text{ является } \beta\text{-nf}.$$

Но $\boldsymbol{\Omega}$ редуцируется лишь к себе и не является β-nf.

Единственность NF. λ-терм имеет не более одной β-nf.

Теперь мы можем доказывать «неравенства», например $\lambda \nvdash \mathtt{TRU} = \mathtt{FLS}$.
Иначе было бы $\mathtt{TRU} =_\beta \mathtt{FLS}$, но это две разные NF, что противоречит единственности.

План лекции

- Теорема о неподвижной точке
- Редексы и нормальная форма
- Теорема Чёрча-Россера
- Стратегии редукции

Стратегии редукции (1)

Как мы можем редуцировать терм?

- Переменная: v — редукция завершена.
- Абстракция: $\lambda x.\, M$ — редуцируем M.
- Аппликация: $M\,N$. Все варианты отсюда.

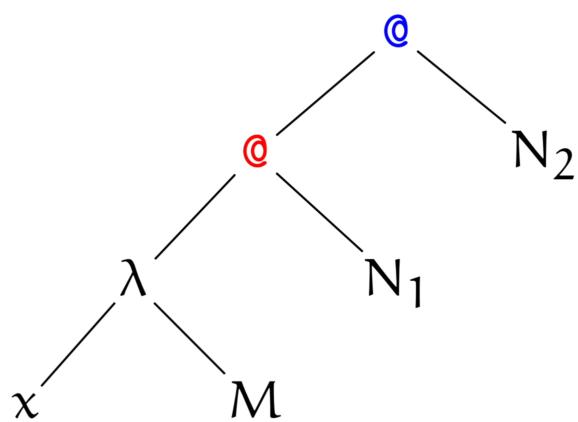
Разбираем аппликацию до не-аппликации (обычно влево):

- $(\ldots((v\,N_1)\,N_2)\ \ldots\ N_k)$ — редуцируем отдельно все N_i (обычно слева направо).
- $(\ldots(((\lambda x.\, M)\,N_1)\,N_2)\ \ldots\ N_k)$. Все варианты отсюда.

Нормальная стратегия: сокращаем редекс $(\lambda x.\, M)\,N_1$.
Аппликативная стратегия: редуцируем отдельно все N_i (обычно слева направо) до нормальной формы N_i', затем сокращаем редекс $(\lambda x.\, M)\,N_1'$.

Стратегии редукции (2)

Удобно изображать терм в виде дерева.
Например, для $((\lambda x.\, M)\, N_1)\, N_2$ дерево имеет вид:



Вершины @ задают аппликацию, вершины λ — абстракцию.

Вершины @ могут задавать редекс (@) или нет (@).
В первом случае при поиске редекса – кандидата на сокращение есть три варианта (нашли, влево, вправо), во втором — два (влево, вправо).

Аппликативная структура терма

Лямбда-терм может иметь одну из двух форм:

$$
\begin{aligned}
\lambda \overrightarrow{x} .\, y\, \overrightarrow{N} \; &\equiv \; \lambda x_1 \ldots x_n .\, y\, N_1 \ldots N_k, \quad n \geqslant 0, k \geqslant 0 \\
\lambda \overrightarrow{x} .\, (\lambda z.\, M)\, \overrightarrow{N} \; &\equiv \; \lambda x_1 \ldots x_n .\, (\lambda y.\, M)\, N_1 \ldots N_k, \quad n \geqslant 0, k > 0
\end{aligned}
$$

Первая форма называется ***головной нормальной формой*** (HNF).

Переменная y называется головной переменной, а редекс $(\lambda z.\, M)\, N_1$ — головным редексом.

Слабая головная нормальная форма (WHNF) — это HNF или лямбда-абстракция, иначе говоря не редекс на верхнем уровне.

Операционная семантика нормальной стратегии

Синтаксические категории:

- Нормальные формы: $\mathtt{NF} \ ::= \ \lambda x.\,\mathtt{NF} \mid \mathtt{NANF}$.
- Нормальные формы – не абстракции: $\mathtt{NANF} \ ::= \ v \mid \mathtt{NANF}\ \mathtt{NF}$.
- Не абстракции: $\mathtt{NA} \ = \ v \mid M\,N$.

Операционная семантика нормальной стратегии:

$$\frac{\mathtt{NA} \ \to \ \mathtt{NA}'}{\mathtt{NA}\ N \ \to \ \mathtt{NA}'\ N}\ \text{(Аппл1)} \qquad \frac{N \ \to \ N'}{\mathtt{NANF}\ N \ \to \ \mathtt{NANF}\ N'}\ \text{(Аппл2)}$$

$$\frac{M \ \to \ M'}{\lambda x.\,M \ \to \ \lambda x.\,M}\ \text{(Абстр)} \qquad (\lambda x.\,M)\,N \ \to \ M[x := N]\ \ \text{(Редук)}$$

Нормальная стратегия всегда сокращает самый левый внешний редекс (leftmost outermost)

Операционная семантика аппликативной стратегии

Синтаксические категории:

- Нормальные формы: $\mathtt{NF} \;::=\; \lambda x.\,\mathtt{NF} \mid \mathtt{NANF}$.
- Нормальные формы – не абстракции: $\mathtt{NANF} \;::=\; v \mid \mathtt{NANF}\ \mathtt{NF}$.
- Не абстракции: $\mathtt{NA} \;=\; v \mid M\,N$.

Операционная семантика аппликативной стратегии:

$$\frac{\mathtt{NA} \;\to\; \mathtt{NA}'}{\mathtt{NA}\ N \;\to\; \mathtt{NA}'\ N}\ (\text{Аппл1}) \qquad \frac{N \;\to\; N'}{\mathtt{NANF}\ N \;\to\; \mathtt{NANF}\ N'}\ (\text{Аппл2})$$

$$\frac{N \;\to\; N'}{(\lambda x.\,M)\ N \;\to\; (\lambda x.\,M)\ N'}\ (\text{Аппл3})$$

$$\frac{M \;\to\; M'}{\lambda x.\,M \;\to\; \lambda x.\,M'}\ (\text{Абстр}) \qquad (\lambda x.\,M)\,\mathtt{NF} \;\to\; M[x := \mathtt{NF}]\ \ (\text{Редук})$$

Теорема о нормализации

Теорема о нормализации. [Карри] Если терм M имеет нормальную форму, то последовательное сокращение самого левого внешнего редекса (leftmost outermost redex) приводит к этой нормальной форме.

То есть нормальная стратегия нормализует нормализуемое.

Можем доказывать отсутствие NF. Например, $\mathbf{K}\ \mathbf{\Omega}\ \mathbf{I}$.

Свойства стратегий

Недостаток нормальной стратегии — возможная неэффективность. Пусть N — «большой» терм

$$(\lambda x.\, F\, x\, (G\, x)\, x)\, N \to_\beta F\, N\, (G\, N)\, N$$

В процессе дальнейших редукций редексы в N придётся сокращать три раза. Зато в

$$(\lambda x\, y.\, y)\, N \to_\beta \lambda y.\, y$$

нормальная стратегия не вычисляет N ни разу.

Аппликативная стратегия в обоих примерах вычислит N один раз.

Стратегии редукции и ЯП

Аппликативная стратегия похожа на стратегию вычислений («энергичную», eager) большинства языков программирования. Сначала вычисляются аргументы, затем происходит применение функции.

Нормальная стратегия похожа на способ вычисления в «ленивых» (lazy) языках (Haskell, Clean). Для решения указанных проблем с эффективностью используют *механизм разделения* (через вычисления на контекстах или через редукцию на графах).

Стратегии редукции и ЯП (2)

Нет необходимости всегда доводить редукцию до NF. На практике часто ограничиваются WHNF. Это позволяет избежать захвата переменной в замкнутом терме (почему?)

При наличии констант (в расширенных системах) понятие WHNF (и HNF) дополняют частично применёнными константными функциями, например

$$\textbf{and true}$$

поскольку его можно записать в η-эквивалентном WHNF-виде

$$\lambda x.\,\textbf{and true}\ x$$

Стратегии редукции и ЯП (3)

Механизм вызова — термин, применяемый при исследовании высокоуровневых языков.

В функциональных языках:

- «вызов по значению» — аппликативный порядок редукций до WHNF
- «вызов по имени» — нормальный порядок редукций до WHNF
- «вызов по необходимости» — «вызов по имени» плюс разделение