

# Домашнее задание

19 февраля 2015 г.

Оператор примитивной рекурсии  $rec$  удовлетворяет следующим равенствам:

- $rec\ z\ s\ \bar{0} \rightarrow_{\beta} z$
- $rec\ z\ s\ \overline{n+1} \rightarrow_{\beta} s\ \bar{n}\ (rec\ z\ s\ \bar{n})$

Реализация:

$$rec = \lambda zsn. n\ (\lambda p. pair\ (suc\ (fst\ p))\ (s\ (fst\ p)\ (snd\ p)))\ (pair\ \bar{0}\ z)$$

Примеры использования:

- $pred = rec\ (\lambda ir. i)\ \bar{0}$
- $fac = rec\ (\lambda ir. mul\ (suc\ i)\ r)\ \bar{1}$

Пример решения рекурсивного уравнения:

Найти  $F$  такой, что  $\forall M : F\ M =_{\beta} M\ F$

Решение:  $F =_{\beta} \lambda x. x\ F =_{\beta} (\lambda fx. xf)\ F$ , ответ:  $F = Y\ (\lambda fx. xf)$ .

Задания:

1. Решить уравнения, используя комбинатор неподвижной точки
  - (a) Найти  $F$  такой, что  $\forall M : F\ M =_{\beta} F$ . (0.5 балла)
  - (b) Найти  $F$  такой, что  $\forall M, N : F\ M\ N =_{\beta} N\ F\ (N\ M\ F)$ . (0.5 балла)
  - (c) Найти  $F$  такой, что  $F\ I\ K\ S =_{\beta} F\ K$ . (0.5 балла)
  - (d) Найти  $F$  такой, что  $F\ I =_{\beta} F\ F$  и  $F\ K =_{\beta} F\ (F\ F)$ . (1 балл)
2. Докажите, используя теорему Чёрча-Россера, следующие факты:
  - (a) Не существует  $F$ , удовлетворяющего  $\forall M : F\ M =_{\beta} F\ M\ M$  и  $F\ M =_{\beta} M\ M\ F$ .
  - (b) Не существует терма  $F$  такого, что  $\forall M, N : F(MN) = M$ .(3 балла)

3. Реализовать при помощи оператора примитивной рекурсии *rec* функцию  $n \mapsto ((n + 1) * n)/2$ . (1 балл)
4. Реализовать функцию аккермана *A*:  
 $A \bar{0} \bar{n} = \bar{n} + \bar{1}$   
 $A \overline{m + 1} \bar{0} = A \bar{m} \bar{1}$   
 $A \overline{m + 1} \overline{n + 1} = A \bar{m} (A \overline{m + 1} \bar{n})$
- (a) При помощи комбинатора неподвижной точки *Y*. (1 балл)  
 (b) При помощи оператора примитивной рекурсии *rec*. (3 балла)
5. Найти термы *nil*, *cons*, *head*, *tail*, *isempty*, *append*, удовлетворяющие следующим уравнениям:
- $isempty \ nil =_{\beta} \ true$
  - $\forall M, N : isempty \ (cons \ M \ N) =_{\beta} \ false$
  - $\forall M, N : head \ (cons \ M \ N) =_{\beta} \ M$
  - $\forall M, N : tail \ (cons \ M \ N) =_{\beta} \ N$
  - $\forall M : append \ nil \ M =_{\beta} \ M$
  - $\forall M, N, L : append \ (cons \ M \ N) \ L =_{\beta} \ cons \ M \ (append \ N \ L)$
- (3 балла)
6. Показать, что  $\forall M \exists N (N \text{ находится в } \beta\text{-нормальной форме и } NI \rightarrow_{\beta} M)$ , где  $I = \lambda x. x$ . (2 балла)
7. Реализовать на любом языке следующую программу.  
 Имена *input* и *output* файлов передаются в параметрах командной строки.  
 Во входном файле на каждой из строчек находится уравнение на термы вида  $F \ A = \ A \ F$ .  
 В результате нужно выдать термы, удовлетворяющие уравнениям, в виде  $F = Y \ (\backslash fa. a \ f)$ . (2 балла)