**Группы перестановок, сопряжение,
действие группы на множестве**

Это домашнее задание посвящено конкретным вычислениям в группе перестановок, операции сопряжения, и понятию действия группы на множестве.

Я напишу список каких-то фактов и каких-то определений, которые уже обсуждались.

Факт. Все перестановки однозначно (с точностью до порядка) раскладываются в произведение независимых циклов. Запись перестановки в виде произведения независимых циклов называется цикловой записью перестановки.

Определение 1. *Пусть G группа, а g её элемент. Рассмотрим отображение $\cdot^g\colon G \to G$ заданное правилом $\cdot^g(h) = h^g := ghg^{-1}$. Это отображение называется сопряжением при помощи элемента g.*

Факт. Отображение сопряжения есть автоморфизм группы G.

Определение 2. *Действием группы X на множестве G называется отображение $\cdot\colon G \times X \to X$, удовлетворяющее аксиомам*
1) $\forall x \in X$ выполнено, что $e \cdot x = x$.
2) $\forall x \in X$, $\forall g, h \in G$ выполнено, что $(gh) \cdot x = g \cdot (h \cdot x)$.
Если задано действие G на X, то X будем называть G-множеством. Тот факт, что группа G действует на X будем обозначать как $G \curvearrowright X$.

Факт. Задать действие G на X это всё равно что задать гомоморфизм из G в группу биекций S_X.

Определение 3. *Орбита элемента x это множество элементов в которые можно попасть из x при помощи действия группы G, а именно*

$$O_x = G \cdot x := \{y \in X \mid \exists g \in G,\ g \cdot x = y\}.$$

Определение 4. *Стабилизатором точки x называется множество элементов группы G, оставляющих её на месте, то есть*

$$Stab_x = G_x := \{g \in G \mid g \cdot x = x\}.$$

Замечание. Для стабилизатора и орбиты приведены два обозначения. Меня учили по первым, но в мире популярнее вторые.

Теорема 1. *Важная теорема гласит, что $|G| = |O_x||Stab_x|$.*

Факт. Если некоторая перестановка h есть цикл $(a_1, \ldots, a_k)$, то сопряжённая к h при помощи g перестановка есть цикл

$$ghg^{-1} = (g(a_1), \ldots, g(a_k)).$$

Факт. Группа вращений куба изоморфна S_4.

Теперь про задачи. Для начала неплохо бы доказать всё то, что я замял под ковёр.

Задание 1. Пусть группа G действует на множестве X. Определим на множестве X отношение $\sim_G$ по следующему правилу $x \sim_G y$, если x лежит в орбите y. Покажите, что это отношение эквивалентности.

Замечание. Таким образом, любое G-множество разбивается в дизъюнктное объединение орбит. На каждой из орбит в отдельности действует группа G(действие можно ограничить). Действие группы G на некоторой орбите примечательно тем, что любой элемент можно перевести в любой. G множество с подобным свойством называется однородным G-пространством.

Задание 2. Пусть группа G действует на множестве X. Покажите, что стабилизатор точки $x \in X$ есть подгруппа группы G.

Определение 5. *Два элемента x, y в группе G называются сопряжёнными, если существует элемент $g \in G$, такой что $x = gyg^{-1}$.*

Определение 6. *Две подгруппы H_1 и H_2 в группе G называются сопряжёнными, если существует элемент $g \in G$, такой что*

$$gH_1g^{-1} = \cdot^g(H_1) = H_2$$

.

Задание 3. Покажите, что отношение "x сопряжено с y" на группе G является отношением эквивалентности. Покажите что отношение "H_1 сопряжено с H_2" на множестве всех подгрупп группы G является отношением эквивалентности.

Задание 4. Покажите, что две сопряжённые подгруппы изоморфны. В частности, в них одинаковое число элементов. Покажите, что порядки сопряжённых элементов одинаковы.

Задание 5. Рассмотрим цикл $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ в S_n. Выпишите обратную перестановку. Как посчитать обратную перестановку, если вы знаете, как исходная перестановка разложена в виде произведения независимых циклов? Что можно сказать про цикловую запись обратной перестановки?

Задание 6. За каждый пункт — балл.
Рассмотрим две перестановки в S_8

$$g = [4\,6\,5\,3\,1\,8\,7\,2], \;\; h = [3\,7\,1\,8\,2\,6\,4\,5].$$

а) Представьте их в виде непересекающихся циклов(в цикловой записи), найдите их порядок;
б) Найдите обратные к ним, а так же ghg^{-1} и hgh^{-1};
в) Найдите количество сопряжённых с каждой из этих перестановок.

Задание 7. Покажите, что если две перестановки в S_n в своей цикловой записи имеют одинаковое количество циклов длины k для всякого k, то они сопряжены.

Задание 8. Найдите группу всех движений правильного тетраэдра. Чему равна группа всех вращений тетраэдра?

Задание 9. Приведите пример автоморфизма, не являющегося внутренним (то есть такого, который не задаётся сопряжением).

Задание 10. Пусть G — группа. Покажите, что все внутренние автоморфизмы группы G образуют группу относительно композиции. Мы будем обозначать эту группу за $Inn(G)$.

Задание 11. Рассмотрим группы вращений куба G. Выберите некоторую нумерацию для ребёр куба, вершин куба, граней куба. Найдите, какую перестановку задаёт а) поворот на 120 градусов относительно какой-то одной из диагоналей куба при действии на рёбрах;
б) поворот на 180 градусов относительно какой-то прямой, проходящей через середины противоположенных рёбер куба при действии на гранях;
в) поворот на 90 градусов относительно какой-то прямой, проходящей через центры противоположенных граней куба при действии на вершинах.

Задание 12. В некоторой плоскости в трёхмерном пространстве находится правильный n-угольник. Найдите порядок группы движений (а не вращений), которые переводят его в себя. Покажите, что эта группа не абелева.

Необязательные задачи

Задание 13. Пусть перестановка h из S_n в цикловой записи есть произведение k_1 циклов длины 1, k_2 циклов длины 2, ..., k_n циклов длины n. Сколько перестановок с ней сопряжено?

Определение 7. *Подгруппа H группы G называется нормальной, если для любого $g \in G$ верно, что $gHg^{-1} = H$.*

Задание 14. Пусть G — группа. Покажите, что $Inn(G)$ — нормальная подгруппа в $Aut(G)$.

Задание 15. Найдите порядок группы вращений n-мерного куба, используя тот факт, что движение в $\mathbb{R}^n$ задаётся образом $n + 1$ точки, а так же, что есть движение, переводящее $n + 1$ точку в $n + 1$ точку, если соответствующие расстояния совпадают. Что вы можете сказать про структуру этой группы?

Задание 16. Опишите группы вращений n-мерного тетраэдра (вообще говоря, он называется n-симплекс).