1 Подсчет остовных деревьев в графе. Матричная теорема о деревьях

Обязательная часть

1.1 (2 балла)**.** Подсчитать количество различных непомеченных остовных деревьев графа $K_{2,n}$.

1.2 (1,5 балла)**.** Используя матричную теорему о деревьях, подсчитать количество всех деревьев на n вершинах.

1.3 (2 балла)**.** Без использования рекуррентного соотношения (**??**) и матричной теоремы о деревьях доказать, что количество остовных деревьев графа $K_{3,n}$ равняется $n^2 \cdot 3^{n-1}$.

1.4 (2 балла)**.** Используя рекуррентное соотношение (**??**), подсчитать количество остовных деревьев в графе W_n (колесе).

1.5 (1,5 балла)**.** Используя матричную теорему о деревьях, подсчитать количество всех остовных деревьев полного двудольного графа $K_{m,n}$.

1.6 (1,5 балла)**.** Используя формулу Кэли, доказать, что в графе $K_n - e$ имеется ровно $(n-2) \cdot \cdot n^{n-3}$ остовных деревьев.

1.7 (1 балл)**.** В случае d-регулярного графа G выразить собственные числа матрицы Кирхгофа $L(G)$ графа G через собственные числа матрицы M_a смежности графа G.

Дополнительная часть

1.8 (2,5 балла)**.** Доказать, что граф Петерсена имеет 2000 остовных деревьев.

1.9 (2,5 балла)**.** Пусть у нас имеется улица с односторонним движением, на которой расположено n парковочных мест. На эту улицу последовательно заезжают машины с порядковыми номерами от 1 до n. Каждая i-я машина по прибытии едет вначале к своему любимому парковочному месту $f(i)$. Если это место оказывается свободным, то она занимает его. В противном случае она пытается занять первое следующее за ним свободное место. В случае, если такового не оказывается, процесс парковки считается завершившимся неудачей.

Функция $f\colon [n] \to [n]$ называется парковочной функцией, если задаваемая ею парковка всех n машин прошла успешно. Доказать, что количество всех различных парковочных функций равно $(n+1)^{(n-1)}$.