DL 76. Докажите, что если $\binom{n}{k}(1-2^{-k})^{n-k} < 1$, то n команд могут так сыграть в волейбол, чтобы для любых k команд нашлась бы команда, которая выиграла бы у них всех.

DL 77. В школе в каждом кружке учится $n \geq 4$ человек, число кружков не превосходит $\frac{4^{n-1}}{3^n}$. Докажите, что можно всем школьникам выставить оценки по поведению (четыре оценки: от 2 до 5), что в каждом кружке будут представлены все 4 оценки.

DL 78. В классе учатся n мальчиков и n девочек, каждому мальчику нравится несколько девочек из класса (возможно, что двум мальчикам нравится одна и та же девочка). Злая учительница рассадила детей за парты мальчик-девочка случайным образом (все варианты рассадки равновероятны). Чему равняется математическое ожидание числа мальчиков, которые сидят с нравившейся ему девочкой за одной партой?

DL 79. Каждый из k человек в лифте, который стоит на первом этаже выбирает случайный этаж равновероятно из оставшихся n этажей. Чему равняется математическое ожидание числа остановок, которые сделает лифт?

DL 80. Покажите, что существует такая формула ϕ в 3-КНФ, в каждом дизъюнкте которой входят ровно три различных переменных, для которой не существует набора, который выполнит больше, чем $\frac{7}{8}m$ дизъюнктов, где m — это число дизъюнктов в ϕ.

DL 81. Покажите, что для формулы в КНФ, состоящей из m дизъюнктов, в которой любые три дизъюнкта можно одновременно выполнить, существует набор значений переменных, который выполняет как минимум $\frac{2}{3}m$ дизъюнктов.

DL 82. Докажите, что в сильно связном турнире есть гамильтонов цикл (простой цикл, проходящий по всем вершинам).

DL 83. В лотерее на выигрыши уходит 40% стоимости билетов. Билет стоит 100 рублей. Докажите, что вероятность выиграть хотя бы 5000 рублей не более 1%.

DL 84. Докажите, что элементы множества $[n]$ можно покрасить в два цвета так, чтобы ни одна арифметическая прогрессия длины $\lceil 2\log(n) \rceil$ не была покрашена в один цвет.

DL 85. Доминирующее множество в графе — это такое множество, что для каждой вершины, либо она сама лежит в этом множестве, либо она соединена ребром с вершиной из этого множества. В графе G минимальная степень вершины равняется $d > 1$. Докажите, что в G есть доминирующее множество размера не больше $n\frac{1+\ln(d+1)}{d+1}$. Подсказка: рассмотрите случайное подмножество вершин, в которое каждая вершина включается с вероятностью $p = \frac{\ln(d+1)}{d+1}$.

DL 64. В графе четное число вершин и степени всех вершин четны. Докажите, что число остовных деревьев четно.

DL 72. Докажите, что если вершины графа имеют степень не больше, чем k, то его вершины можно покрасить в $\frac{k}{2}+1$ цвет так, чтобы для каждой вершины не более одного ребра исходило в вершины того же цвета.

DL 74. В сильно связном ориентированном графе (сильно связный граф, значит из любой вершины можно добраться до любой другой) между любыми двумя вершинами существует максимум одно ребро, кроме того из любой вершины выходит по крайне мере два ребра. Докажите, что в таком графе можно удалить вершину без потери сильной связности.

DL 75. Пусть функция CONN принимается на вход ребра графа и возвращает 1 тогда и только тогда, когда данный граф связен.

а) Докажите, что глубина дерева решений функции CONN равна $\frac{n(n-1)}{2}$, где n — число вершин входного графа.

б) Оцените размер дерева решений функции CONN.