

Теория категорий

Монады

Валерий Исаев

07 сентября 2015 г.

Монады

Алгебры над монадами

Категория Клейсли

Алгебраические теории

Определение

Свойства категории моделей

Связь с монадами

Определение

Definition

Монада на категории \mathbf{C} – это тройка (T, η, μ) , состоящая из эндифунктора $T : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$, и пары естественных преобразований $\eta_A : A \rightarrow T(A)$ и $\mu_A : TT(A) \rightarrow T(A)$. Эта тройка должна удовлетворять следующим условиям:

$$\begin{array}{ccc} TTT(A) & \xrightarrow{T(\mu_A)} & TT(A) \\ \mu_{T(A)} \downarrow & & \downarrow \mu_A \\ TT(A) & \xrightarrow{\mu_A} & T(A) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} T(A) & \xrightarrow{\eta_{T(A)}} & TT(A) & \xleftarrow{T(\eta_A)} & T(A) \\ & \searrow id_{T(A)} & \downarrow \mu_A & \swarrow id_{T(A)} & \\ & & T(A) & & \end{array}$$

Монады из сопряжения

- ▶ Если $(F : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}, G : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}, \eta_A : A \rightarrow GF(A), \epsilon_B : FG(B) \rightarrow B)$ – сопряжение, то $(G \circ F, \eta, G(\epsilon_{F(A)}))$ – монада.
- ▶ Коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccc}
 GF\!G\!F\!G\!F(A) & \xrightarrow{GF\!G(\epsilon_{F(A)})} & GF\!G\!F(A) \\
 \downarrow G(\epsilon_{GF\!G\!F(A)}) & & \downarrow G(\epsilon_{F(A)}) \\
 GF\!G\!F(A) & \xrightarrow{G(\epsilon_{F(A)})} & GF(A)
 \end{array}$$

следует из того факта, что ϵ – естественное преобразование.

Монады из сопряжения

Коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccccc}
 GF(A) & \xrightarrow{\eta_{GF(A)}} & GFGF(A) & \xleftarrow{GF(\eta_A)} & GF(A) \\
 & \searrow id_{GF(A)} & \downarrow G(\epsilon_{F(A)}) & & \swarrow id_{GF(A)} \\
 & & GF(A) & &
 \end{array}$$

следует из свойств единицы и коединицы.



Примеры монад из сопряжения

- ▶ В категории **Hask** функтор $- \times B$ является левым сопряженным. Как называется монада, соответствующая этому сопряжению?
- ▶ Мы видели пример сопряжения между категорией моноидов и категорией множеств. Монада на категории **Set**, соответствующая этому сопряжению, является аналогом монады списков в категории **Hask**.
- ▶ Можно ли в категории **Hask** определить аналоги монад над категорией **Set**, соответствующих другим алгебраическим структурам?
- ▶ Иногда можно, если правильно определить *instance Eq* для типа монад.

Монады

Алгебры над монадами

Категория Клейсли

Алгебраические теории

Определение

Свойства категории моделей

Связь с монадами

Мотивация

- ▶ Пусть T – монада над категорией \mathbf{C} , которая получена из некоторого сопряжения.
- ▶ Можно ли восстановить это сопряжение по монаде?
- ▶ Не всегда, но если исходное сопряжения достаточно хорошее (говорят, что оно *монадично*), то можно.

Определение алгебр

Definition

Пусть (T, η, μ) – монада над \mathbf{C} . Тогда T -алгебра – это пара (A, h) , где A – объект \mathbf{C} и $h : T(A) \rightarrow A$ – морфизм, удовлетворяющий следующим условиям:

$$\begin{array}{ccc}
 TT(A) & \xrightarrow{T(h)} & T(A) \\
 \mu_A \downarrow & & \downarrow h \\
 T(A) & \xrightarrow{h} & A
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{\eta_A} & T(A) \\
 \searrow id_A & & \downarrow h \\
 & & A
 \end{array}$$

Определение категории алгебр

Definition

Морфизм T -алгебр (A, h) и (A', h') – это \mathbf{C} -морфизм $f : A \rightarrow A'$, удовлетворяющий следующему условию:

$$\begin{array}{ccc}
 T(A) & \xrightarrow{h} & A \\
 T(f) \downarrow & & \downarrow f \\
 T(A') & \xrightarrow{h'} & A'
 \end{array}$$

Тождественный морфизм и композиция морфизмов определены так же, как в \mathbf{C} . Это задает категорию T -алгебр, которую мы будем обозначать $T\text{-alg}$.



Примеры категорий алгебр

- ▶ Пусть $T : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ – монада, соответствующая сопряжению $F \dashv U : \mathbf{Mon} \rightarrow \mathbf{Set}$. То есть $T(A)$ – множество конечных последовательностей элементов из A .
- ▶ Тогда структура T -алгебры на множестве A состоит из функции $h : T(A) \rightarrow A$, удовлетворяющей ряду аксиом.
- ▶ Если A – моноид, то мы можем определить h как $h([a_1 \dots a_n]) = a_1 * \dots * a_n$.
- ▶ И наоборот, если на A есть структура T -алгебры, то на A есть структура моноида: $1 = h([])$ и $a * b = h([a b])$.
- ▶ Можно показать, структура T -алгебры и структура моноида на множестве A – это одно и то же.
- ▶ Можно показать, что категории T -алгебр и моноидов изоморфны.

Примеры категорий алгебр

- ▶ В общем случае это тоже верно.
- ▶ Пусть $T : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ – монада, соответствующая некоторому “алгебраическому” сопряжению $F \dashv U : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{Set}$, где \mathbf{D} – категория каких-либо алгебраических структур.
- ▶ Тогда категории T -алгебр изоморфна категории \mathbf{D} .
- ▶ Это следует из теоремы Бека, которую мы доказывать не будем.

Примеры алгебр

- ▶ Тип *Tree* бинарных деревьев

$$\text{data Tree } a = \text{Leaf } a \mid \text{Node (Tree } a) \text{ (Tree } a)$$

является монадой.

- ▶ Алгебра над *Tree* – это тип X с одной бинарной операцией $* : X \times X \rightarrow X$.
- ▶ Связь становится более очевидной, если переписать тип *Tree* следующим образом:

$$\text{data Expr } a = \text{Var } a \mid \text{Expr } a : * \text{ Expr } a$$

Монадичность алгебр

- ▶ Пусть $T : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ – монада. Из категории алгебр существует забывающий функтор $U^T : T\text{-alg} \rightarrow \mathbf{C}$, $U^T(A, h) = A$.
- ▶ Существует функтор $F^T : \mathbf{C} \rightarrow T\text{-alg}$, сопоставляющий каждому объекту A свободную T -алгебру на A .

$$F^T(A) = (T(A), \mu_A)$$

- ▶ F^T является левым сопряженным к U^T и монада, соответствующая этому сопряжению, – это просто T .
- ▶ Доказательство: упражнение.

Монадичность сопряжения

- ▶ Пусть $F \dashv U : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ – сопряжение, а $T = U \circ F$ – соответствующая ему монада.
- ▶ Тогда существует уникальный функтор $K : \mathbf{D} \rightarrow T\text{-alg}$, такой что $U^T \circ K = U$ и $K \circ F = F^T$.
- ▶ Это утверждение доказывается не очень сложно, но мы не будем этого делать.
- ▶ Если функтор K является эквивалентностью категорий, то говорят, что сопряжение *монадично* (еще говорят, что U монадичен, и, что \mathbf{D} монадично над \mathbf{C}).
- ▶ Если K является изоморфизмом, то говорят, что сопряжение *строго монадично*.
- ▶ Как уже отмечалось ранее алгебраические категории монадичны над **Set**.

План лекции

Монады

Алгебры над монадами

Категория Клейсли

Алгебраические теории

Определение

Свойства категории моделей

Связь с монадами

Определение

- ▶ Пусть (T, η, μ) – монада над \mathbf{C} . Тогда категория Клейсли \mathbf{Kl}_T определяется следующим образом.
- ▶ Объекты \mathbf{Kl}_T – это объекты \mathbf{C} .
- ▶ Морфизмы \mathbf{Kl}_T из A в B – это морфизмы в \mathbf{C} из A в $T(B)$.
- ▶ Тожественный морфизм – η_A , композиция морфизмов $f : A \rightarrow T(B)$ и $g : B \rightarrow T(C)$ – $\mu_C \circ T(g) \circ f$.

Свойства

- ▶ Категория Клейсли эквивалентна полной подкатегории $T\text{-alg}$ на свободных T -алгебрах. То есть алгебрах вида $(T(A), \mu_A)$.
- ▶ Доказательство: упражнение.
- ▶ Существует функтор $F_T : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Kl}_T$, $F_T(A) = A$,
 $F_T(f : A \rightarrow B) = \eta_B \circ f$.
- ▶ Существует функтор $U_T : \mathbf{Kl}_T \rightarrow \mathbf{C}$, $U_T(A) = T(A)$,
 $U_T(f : A \rightarrow T(B)) = \mu_B \circ T(f)$.
- ▶ Функтор F_T является левым сопряженным к U_T , монада $U_T \circ F_T$ – это просто T .

Свойства

- ▶ Пусть $F \dashv U : \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ – некоторое сопряжение, и T – соответствующая ему монада.
- ▶ Тогда существует уникальный функтор $L : \mathbf{Kl}_T \rightarrow \mathbf{D}$, такой что $U \circ L = U_T$ и $L \circ F_T = F$.
- ▶ Таким образом, категория Клейсли является начальным объектом в некоторой категории сопряжений (мы ее не определяли), а категория алгебр является терминальным объектом в этой категории.

План лекции

Монады

Алгебры над монадами

Категория Клейсли

Алгебраические теории

- Определение

- Свойства категории моделей

- Связь с монадами



Теория

Алгебраическая теория $T = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{A})$ состоит из следующего набора данных:

- ▶ Множество сортов \mathcal{S} .
- ▶ Множество функциональных символов \mathcal{F} , где для каждого символа указана его сигнатура:

$$\sigma : s_1 \times \dots \times s_k \rightarrow s$$

- ▶ Множество аксиом \mathcal{A} , где каждая аксиома – это выражение вида $t_1 = t_2$, где t_1, t_2 – термы, составленные из функциональных символов теории и переменных.



Примеры теорий

- ▶ Теории (коммутативных) моноидов, (абелевых) групп и (коммутативных) колец (с единицей) являются примерами алгебраических теорий с одним сортом.
- ▶ Теория коммутативных колец и модулей над ними является примером алгебраической теории с двумя сортами.
- ▶ Теория полей не алгебраична.
- ▶ Теория графов состоит из двух сортов V и E и двух функциональных символов $d, c : E \rightarrow V$.
- ▶ Теория множеств состоит из одного сорта и не содержит никаких символов и аксиом.
- ▶ Тривиальная теория состоит из одного сорта и одной аксиомы $x = y$.



Модели теории

- ▶ Модель M теории T – это коллекция множеств $\{M_s\}_{s \in S}$ вместе с функциями $M(\sigma) : M_{s_1} \times \dots \times M_{s_k} \rightarrow M_s$ для каждого функционального символа $\sigma : s_1 \times \dots \times s_k \rightarrow s$, удовлетворяющая аксиомам.
- ▶ Морфизм f моделей M и N – это коллекция функций $\{f_s\}_{s \in S}$, такая что для всех $\sigma : s_1 \times \dots \times s_k \rightarrow s$ и всех $a_1 \in M_{s_1}, \dots, a_k \in M_{s_k}$ верно, что $f_s(M(\sigma)(a_1, \dots, a_k)) = N(\sigma)(f_{s_1}(a_1), \dots, f_{s_k}(a_k))$.
- ▶ У нас есть тождественный морфизм и композиция морфизмов, удовлетворяющие необходимым свойствам.
- ▶ Следовательно, существует категория моделей теории T , которую мы будем обозначать **$T\text{-Mod}$** .



Примеры моделей

- ▶ Категории моделей теорий (коммутативных) моноидов, (абелевых) групп и (коммутативных) колец (с единицей) являются категориями соответствующих алгебраических структур.
- ▶ Категория моделей теории графов эквивалентна категории графов.
- ▶ Категория теории множеств – это **Set**.
- ▶ Категория моделей тривиальной теории тривиальна, то есть эквивалентна дискретной категории на одном объекте.



Функторы

- ▶ Пусть $\mathbf{Set}^{\mathcal{S}}$ – категория \mathcal{S} -индексированных множеств.
- ▶ Забывающий функтор $U : T\text{-Mod} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{S}}$ является строгим и правым сопряженным.
- ▶ Левый сопряженный $F : \mathbf{Set}^{\mathcal{S}} \rightarrow T\text{-Mod}$ к нему для каждого \mathcal{S} -индексированного множества X возвращает свободную модель на X .
- ▶ Другими словами, $F(X)$ определяется как множество термов теории T с переменными в X с точностью до эквивалентности, определяемой аксиомами.
- ▶ Единица сопряжения $\eta_X : X \rightarrow UF(X)$ каждому $x \in X$ сопоставляет терм из одной переменной x .
- ▶ Коединица сопряжения $\epsilon_M : FU(M) \rightarrow M$ каждому терму сопоставляет элемент модели M , который задается этим термом.



Пределы и копределы

- ▶ Категория моделей любой алгебраической теории полна, U сохраняет пределы.
- ▶ Все операции определены поточечно.
- ▶ Категория моделей любой алгебраической теории кополна.
- ▶ Коуравнитель $f, g : M \rightarrow N$ можно определить как $UFU(N)$ с точностью до отношения эквивалентности, которое порождается отношениями $f(x) \sim g(x)$ для всех $x \in M$.
- ▶ Копроизведение $\coprod_{i \in I} M_i$ определяется как $UF(\coprod_{i \in I} U(M_i))$ с точностью до отношения эквивалентности, которое порождается отношениями $\sigma(a_1, \dots, a_k) \sim M_i(\sigma)(a_1, \dots, a_k)$ для всех символов σ и всех $a_1, \dots, a_k \in M_i$.



От теорий к монадам

- ▶ Любая алгебраическая теория T определяет монаду на \mathbf{Set}^S – монаду, соответствующую сопряжению $F \dashv U$.
- ▶ Категория моделей T эквивалентна категории алгебр над $U \circ F$.
- ▶ Действительно, алгебра над $U \circ F$ – это просто S -индексированное множество вместе с функцией интерпретирующей термы теории T .
- ▶ Любую модель теории можно достроить до интерпретации всех теормов теории.
- ▶ В частности у нас есть интерпретация всех функциональных символов $\sigma(x_1, \dots, x_k)$.
- ▶ В этой интерпретации выполняются аксиомы, так как термы рассматриваются с точностью до эквивалентности, порождаемой аксиомами.



От монад к теориям

- ▶ Любой монаде $T : \mathbf{Set}^{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{S}}$ можно сопоставить алгебраическую теорию с множеством сортов \mathcal{S} .
- ▶ Множество функциональных символов с сигнатурой $s_1 \times \dots \times s_k \rightarrow s$ мы определим как $T(\{x_1 : s_1, \dots, x_k : s_k\})_s$.
- ▶ Аксиомы теории:

$$\eta_{\{x:s\}}(x) = x$$

$$\text{bind}(t, x_i \mapsto t_i) = t(t_1, \dots, t_k)$$

для всех $t \in T(\{x_1 : s_1, \dots, x_k : s_k\})_s$ и $t_1 \in T(X)_{s_1}, \dots, t_k \in T(X)_{s_k}$, где $\text{bind}(t, f) = \mu_X(T(f))(t)$.



Финитарные монады

- ▶ В общем случае категория моделей теории, которую мы построили по монаде, не будет эквивалентна категории алгебр над этой монадой.
- ▶ Действительно, мы в определении применяли T только к конечным множествам.
- ▶ Если монада финитарна, то это будет верно, то есть финитарные монады – это примерно то же самое, что и алгебраические теории.
- ▶ Интуитивно монада финитарна, если ее значения на бесконечных множествах однозначно определяется ее значением на конечных.



Направленные копределы

- ▶ Частично упорядоченное множество называется *направленным*, если любое его конечное подмножество имеет верхнюю границу (не обязательно точную!).
- ▶ Диаграмма в некоторой категории называется *направленной*, если она индексирована направленным множеством.
- ▶ Копредел называется *направленным*, если он является копределом направленной диаграммы.
- ▶ Монада называется *финитарной*, если она сохраняет направленные копределы.



Примеры направленных копределов

- ▶ Любая полурешетка является направленным множеством.
- ▶ В частности множество конечных подмножеств любого множества является направленным.
- ▶ Любое множество является копределом своих конечных подмножеств, индексированных этим множеством.