Домашнее задание по математическому анализу №2 на 13 марта
Тема: неопределённые, определённые интегралы:
рациональный функции, различные замены переменной, интегрирование по частям

Комментарий. В тех заданиях, в которых требуется раскладывать рациональные дроби на простейшие, процедура разложения должна быть подробно описана в решении. Везде, где в ответе получается больше двух рациональных дробей, решение "Коэффициенты я угадал"не засчитывается!

1. (1 балл)

$$\int_1^3 \frac{dx}{(x+1)(x+2)^2(x+3)^3}.$$

2. (1 балл)

$$\int_{1/2}^0 \frac{x\,dx}{x^3-1}.$$

3. (2 балла)

$$\int_0^2 \frac{x\,dx}{(x^3+1)^2}.$$

Интеграл от дифференциального бинома

$$\int x^m(a+bx^n)^p\,dx,$$

где m, n и p — рациональные числа, может быть приведён к интегрированию рациональных функций лишь в следующих трёх случаях:

(i) Пусть p — целое число, тогда помогает замена $x=t^N$, где N — общий знаменатель дробей m и n.

(ii) Пусть $\frac{m+1}{n}$ — целое. В этом случае поможет замена переменной $a+bx^n=t^N$, где N — знаменатель дроби p.

(iii) Пусть $\frac{m+1}{n}+p$ —целое. Нужно применить подстановку $ax^{-n}+b=t^N$, где N — знаменатель дроби p

4. (1 балл)

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}.$$

5. (1 балл)

$$\int \sqrt{x^3+x^4}.$$

6. (1 балл)

$$\int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1+x^4}}.$$

7. (1 балл)

$$\int \frac{\sqrt{x}}{(1+\sqrt[3]{x})^2}dx$$

8. Вычислить

а) (1 балл)

$$\int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos^7(x)}\,dx;$$

б) (1 балл)

$$\int\limits_{4\pi/3}^{3\pi/4} \frac{1}{\cos^6(x)}\, dx;$$

Подсказка: помогают рекуррентные формулы для понижения степени

9. (2 балла) Вычислить

$$\int \frac{\cos(x) - 3\sin(x)}{\cos(x) - 3\sin(x) + 3}\, dx.$$

10. (2 балла) Вычислить интеграл

$$\int\limits_{-\pi/3}^{\pi/6} \frac{-3\cos^2(x) - \sin(x)\cos(x) + \sin^2(x)}{\sin(x)(1+\cos(x))}\, dx.$$

11. Используя тригонометрические и гиперболические замены переменных ($\mathrm{ch}(t) = x$, $1/\cos(t) = x$, $\mathrm{tg}(t) = x$, и др.) и прочую доступную технику вычислить интегралы

а) (1 балл)

$$\int\limits_{-1/2}^{1/2} \sqrt{1-x^2}\, dx;$$

б) (1 балл)

$$\int\limits_{-2}^{2} \frac{dx}{(x^2+4)^{3/2}};$$

в) (1 балл)

$$\int\limits_{0}^{3/2} \frac{dx}{(x^2+4)^{3/2}};$$

Г) (1 балл)

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{x^2-2}}.$$

12. По прилагаемому к письму файлу познакомьтесь с **подстановками Эйлера**. С их помощью вычислите интегралы

а) (1 балл)

$$\int \frac{dx}{(x-1)\sqrt{-x^2+3x-2}};$$

б) (1 балл)

$$\int \frac{dx}{x - \sqrt{x^2-x+1}};$$

в) (1 балл)

$$\int \frac{(x+\sqrt{1+x^2})^{15}}{\sqrt{1+x^2}}\, dx.$$

13. Пусть f — непрерывная функция: $f\colon [a;b] \to [m;M]$; φ – выпуклая на $[m;M]$; p – непрерывная и неотрицательная функция на $[a;b]$, причём $\int\limits_a^b p(x)\, dx = 1$. Докажите, что а) (3 балла) $\varphi\left(\int_a^b f(x)p(x)\,dx\right) \leqslant \int\limits_a^b \varphi(f(x))p(x)\,dx$;

б) (3 балла) если $f > 0$, то

$$\left(\int\limits_a^b \frac{p(x)}{f(x)}\,dx\right)^{-1} \leqslant e^{\int\limits_a^b p(x)\ln(f(x))dx} \leqslant \int\limits_a^b p(x)f(x)\,dx$$