Реберная раскраска. Хроматический многочлен.(ДЗ)

22 марта 2017 г.

1. Декартовым произведением $G \square H$ двух графов G и H называется граф, множество вершин которого представляет собой декартово произведение $V(G) \times V(H)$. При этом ребра между вершинами (x, y) и (x', y') в графе $G \square H$ проводятся согласно следующему правилу: если $x = x'$, а вершины y и y' смежны в H, или если $y = y'$, а вершины x и x' смежны в G. Иными словами, в графе $G \square H$ любая вершина $x \in G$ заменяется копией графа H, и наоборот, любая вершина $y \in H$ заменяется на некоторую копию графа G. Так, например, граф $P_n \square K_2$ представляет собой граф "лестница", граф $K_2 \square K_2 = C_4$, граф $C_4 \square K_2 = Q_3$, а декартово произведение n экземпляров графа K_2 представляет собой n-мерный куб Q_n.

   (a) Сосчитать реберное хроматическое число графа $C_n \square K_2$.

   (b) Используя теорему Визинга, доказать, что $\chi'(G \square K_2) = \Delta(G \square K_2)$.

   (c) Пусть G и H представляют собой нетривиальные простые графы, для одного из которых справедливо равенство $\chi'(H) = \Delta(H)$. Используя теорему Визинга, доказать, что в этом случае $\chi'(G \square H) = \Delta(G \square H)$.

2. Доказать, что реберное хроматическое число $\chi'(G)$ регулярного графа G, имеющего точку сочленения, строго больше $\Delta(G)$.

3. Доказать, что реберное хроматическое число $\chi'(K_{2n})$ полного графа K_{2n} равно $2n - 1$, предъявив конструктивный способ окраски ребер в $2n - 1$ цвет для любого $n > 1$.

4. Используя результаты предыдущего упражнения, показать, что реберное хроматическое число $\chi'(K_{2n-1})$ полного графа K_{2n-1} также равно $2n - 1$.

5. Докажите, что
$$t(G) \geq \binom{n}{3} + \frac{2m^2}{n} - m(n-1),$$
где $t(G)$ — это количество треугольников в G плюс количество треуголиников в $\bar{G}$

6. Доказать, что хроматический полином простого цикла C_n длины n рассчитывается по формуле
$$P_{C_n}(z) = (-1)^n(z-1) + (z-1)^n.$$

7. Подсчитать хроматический полином для графа W_n "колесо".

8. Доказать, что любой интервальный граф G является хордальным графом.

9. Подсчитать хроматический полином для графа G_n, построенного на $2n$ вершинах следующим образом: Есть вершины x_i, y_i для любого i от 1 до n. Построены следующие ребра $x_i y_i$ для любого i и ребра $x_i x_{i+1}, y_i y_{i+1}$ для любого $i < n$.

10. Пусть подграфы H_1 и H_2 графа $G = H_1 \cup H_2$ имеют единственную общую вершину x, то есть $V(G) \cap V(H) = \{x\}$. Показать, что
$$P_G(z) = \frac{P_{H_1}(z) \cdot P_{H_2}(z)}{z}.$$
Обобщить полученный результат на связный граф G, состоящий из m двусвязных блоков B_m.

Задача которую можно досдать в зачет к прошлому заданию:

1. Напомним, что реберным графом (line graph) $L(G)$ графа G называется граф, вершинам которого соответствуют ребра графа G. При этом две вершины $e, f \in L(G)$ реберного графа смежны в $L(G)$, если они имеют общую концевую вершину в графе G. Доказать, что реберный граф любого двудольного графа является совершенным.