Задания

17 февраля 2018 г.

Если M – моноид, то мы будем обозначать $\mathbf{C}_M$ категорию с одним объектом $*$ и множеством морфизмов $Hom_{\mathbf{C}_M}(*, *) = M$, операция композиции и тождественный морфизм в которой определяются как соответствующие операции в M.

Предпорядок $(X, \leq)$ – это множество X с рефлексивным и транзитивным бинарным отношением $\leq$. Задать структуру предпорядка на множестве – это то же самое, что и задать на нем структуру категории, в которой между любой парой объектов существует максимум один морфизм. Если $(X, \leq)$ – предпорядок, то мы будем обозначать соответствующую ему категорию как $\mathbf{C}_{(X,\leq)}$. Множество объектов этой ктаегории равно X, а множество морфизмов $Hom_{\mathbf{C}_{(X,\leq)}}(x, y)$ состоит из одного элемента, если $x \leq y$, и пусто в противном случае.

1. Изоморфны ли следующие объекты категории **Hask**? Если да, напишите функции, устанавливающие иоморфизм.
   (a) $Bool$ и $Maybe\ Bool$.
   (b) $Either\ Bool\ Bool$ и $(Bool, Bool)$.
   (c) $Integer$ и $Maybe\ Integer$.
   (d) $Integer$ и $[()]$.
2. Пусть M – некоторый моноид. Определим тогда категорию $\mathbf{C}_M$ как категорию с одним объектом и множеством морфизмов равным M. Композиции и тождественный морфизм определяются из структуры моноида. Какие морфизмы являются изоморфизмами в следующих категориях?
   (a) $\mathbf{C}_{(\mathbb{N},+)}$.
   (b) $\mathbf{C}_{(\mathbb{N},*)}$.
   (c) $\mathbf{C}_{(\mathbb{Z},+)}$.
   (d) $\mathbf{C}_{(\mathbb{Z},*)}$.
   (e) $\mathbf{C}_{(\mathbb{Q},+)}$.
   (f) $\mathbf{C}_{(\mathbb{Q},*)}$.

3. Предпорядок называется частичным порядком, если из условия, что $x \le y$ и $y \le x$, следует, что $x = y$. Чему в категориальныъ терминах соотвествует это свойство?

4. Опишите следующие моноиды и группы:

   (a) $Aut_{\mathbf{Set}}(A)$, где A – множество букв русского алфавита.

   (b) $Aut_{\mathbf{FinSet}}(A)$, где A – множество букв русского алфавита.

   (c) $Endo_{\mathbf{C}_M}(*)$, где M – некоторый моноид.

   (d) $Endo_{\mathbf{Grp}}(\mathbb{Z})$.

   (e) $Aut_{\mathbf{Grp}}(\mathbb{Z})$.

   (f) $Endo_{\mathbf{Ring}}(\mathbb{Z})$, где **Ring** – категория колец с единицей.

   (g) $Aut_{\mathbf{C}}(X)$, где **C** – скелетная категория, и X – произвольный объект **C**.

   (h) $Endo_{\mathbf{Vec}}(\mathbb{R}^n)$.

   (i) $Aut_{\mathbf{Num}}(n)$.

   (j) $Endo_{\mathbf{C}_{(X,\le)}}(x)$, где x – произвольный элемент X.

5. Какие из следующих категорий являются скелетными: **Set**, **FinSet**, **Grp**, **Vec**, **Hask**, **Mat**, **Num**?

6. Какие из следующих категорий являются группоидами: **Set**, **FinSet**, **Grp**, **Vec**, **Hask**, **Mat**, **Num**?

7. Какие из следующих категорий могут быть скелетными и в каких случаях?

   (a) Дискретные категории.

   (b) Категории вида $\mathbf{C}_M$.

   (c) Категории предпорядка.

   (d) Группоиды.

8. Какие из следующих категорий могут быть группоидами и в каких случаях?

   (a) Дискретные категории.

   (b) Категории вида $\mathbf{C}_M$.

   (c) Категории предпорядка.

   (d) Скелетные категории.

9. Пусть $f, f' : X \to Y$ и $g, g' : Y \to X$ – морфизмы в некоторой категории $\mathbf{C}$. Докажите, что если диаграммы

$$
\begin{tikzcd}
 & Y \arrow[dr, "g"] & \\
X \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "id_X"'] & & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & X \arrow[dr, "f'"] & \\
Y \arrow[ur, "g'"] \arrow[rr, "id_Y"'] & & Y
\end{tikzcd}
$$

коммутируют и $f = f'$, то X и Y изоморфны.

10. Приведите пример, показывающий, что условие $f = f'$ в предыдущем задании является необходимым.

11. Какие из следующих категорий являются малыми: **Set**, **FinSet**, **Grp**, **Vec**, **Hask**, **Mat**, **Num**, $\mathbf{C}_M$, $\mathbf{C}_{(X,\leq)}$?

12. Какие из следующих категорий являются локально малыми: **Set**, **FinSet**, **Grp**, **Vec**, **Hask**, **Mat**, **Num**, $\mathbf{C}_M$, $\mathbf{C}_{(X,\leq)}$?