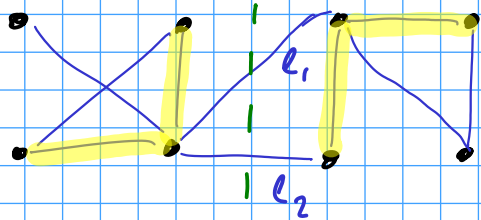


MST алгоритм Крускала

Обратное разреза:



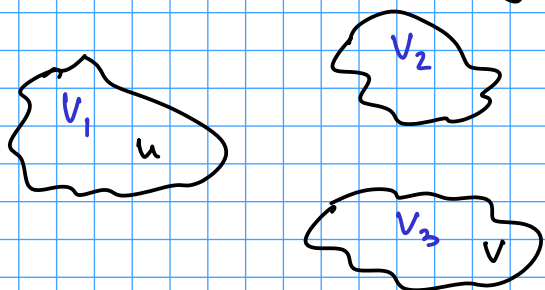
$\min(e_1, e_2) \in MST$

Disjoint sets:

- Create(S)

- find(v) - по эл-ту найти ~~к какому компоненту он принадлежит~~ ^{представителем кк-ва}

- union(v, u) - объединить два кк-ва.



v_1, v_2, v_3 - представители

Kruskal((V, E)):

Sort E

$T = \{\}$

for $(u, v) \in E$:

if $\text{find}(u) \neq \text{find}(v)$:

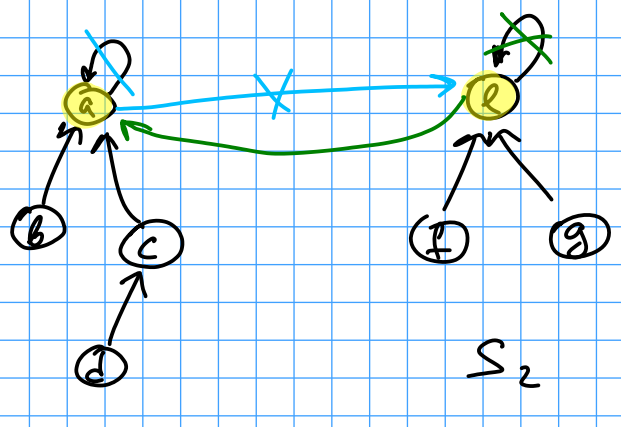
$T = T \cup \{(u, v)\}$

union(u, v)

return T

$S_1 = \{a, b, c, d\}$

$S_2 = \{e, f, g\}$



find(v):

while parent[v] ≠ v:

v = parent[v]

return v

create(v):

parent(v) = v

rank(v) = 0

union(u, v):

$v_1 = \text{find}(u)$

$v_2 = \text{find}(v)$ // $v_2 \neq v_1$

if rank(v_1) > rank(v_2):

parent(v_2) = v_1

else

parent(v_1) = v_2

if rank(v_1) = rank(v_2):

rank(v_2) = rank(v_2) + 1 // *

Утв: у узла rank = k ≥ 2^k - 1 потомков.

База: k = 0

Предп: для k ≤ m - верно. Покажем где K = m + 1

Переход: union(v_1, v_2): rank(find(v_1)) = rank(find(v_2)) = m

потомков ≥ 2^m - 1 + 2^m - 1 + 1 = 2^{m+1} - 1

↑
корень

□

Следствие:

узлов rank k ≤ $\frac{n}{2^k}$

Следствие:

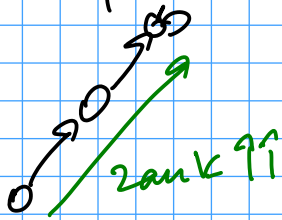
Max rank = $\lfloor \log_2 n \rfloor$

УТВ:

$$\text{Max высота дерева} = O(\log n)$$

УТВ:

$$\text{if } v \neq \text{parent}(v) \Rightarrow \text{rank}(v) < \text{rank}(\text{parent}(v))$$



$$\text{УТВ: Time(find)} = O(\log(n))$$

Следствие:

Алг. Крускала работает за

$$O(E \log V) + O(E \log V)$$

сортировка по весу

$$O(1) \quad O(E)$$

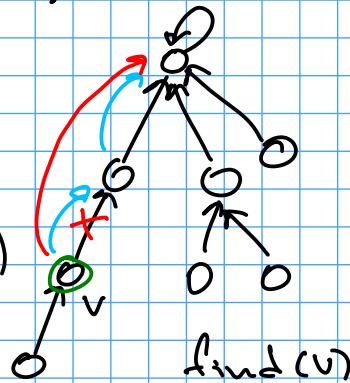
Эвристика сжатия путей.

find(v):

if parent(v) ≠ v:

parent(v) = find(parent(v))

return parent(v)

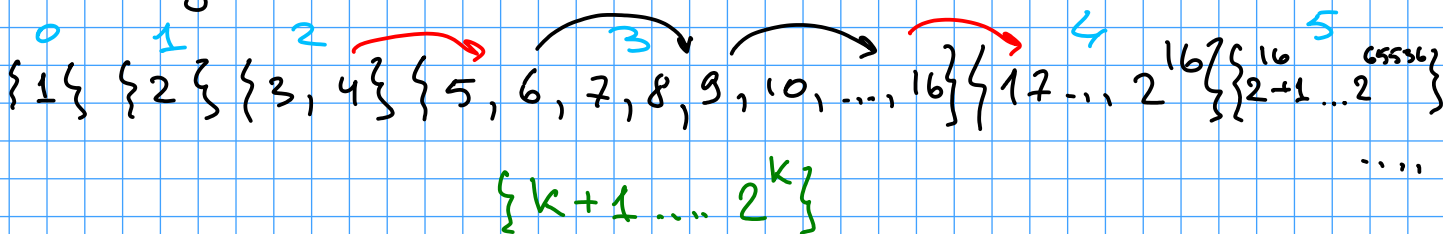


m раз вызовов find

Замечание:

rank ≠ высота

1 ... log n



Всего $\log^* n$ отрезков

$$\log_2^* 1000 = 4$$

$$\log_2 1000 = 9.$$

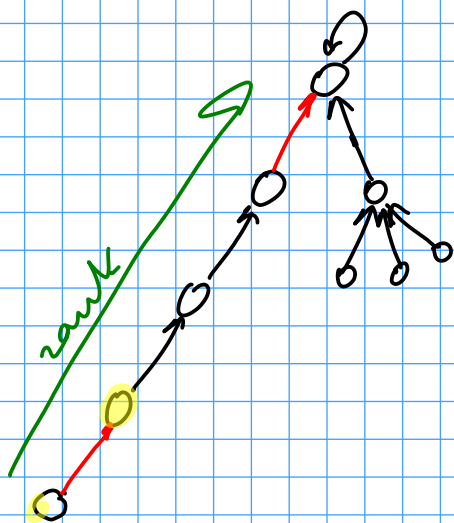
$$\log_2 9 = 3.$$

$$\log_2 3 = 1.$$

$$\log_2 1 < 1$$

УТВ:

В отрезке $\{k+1 \dots 2^k\} \leq 2^k$ $\Rightarrow n$ -ов



Узлы двух типов:

- $\text{rank}(v)$ и $\text{rank}(\text{parent}(v))$
лежат в одном интервале

- $\text{rank}(v)$ и $\text{rank}(\text{parent}(v))$
лежат в разных интервалах

УТВ: $\#$ узлов 2-го типа
в $\#$ узла $\leq \log^* n$

Вершины из интервала $\{k+1 \dots 2^k\}$
выдадут 2^k монеток при ответе на вопросы
по первым ребрам

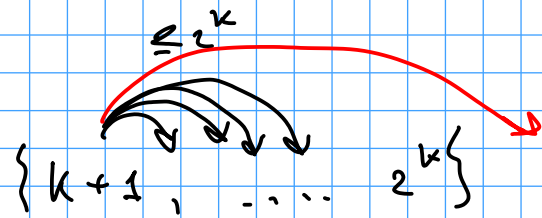
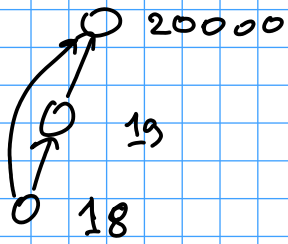
Всего: $\leq \underline{n \cdot \log^* n}$ монеток

Для интервала $\{k+1 \dots 2^k\}$

$$\begin{aligned} \text{выдадут } & 2^k \cdot \#(\text{вершин в интервале}) = \\ & = 2^k \cdot \left(\frac{n}{2^{k+1}} + \frac{n}{2^{k+2}} + \frac{n}{2^{k+3}} + \dots \right) \leq \\ & \leq 2^k \cdot \frac{n}{2^k} = n \end{aligned}$$

Замечание: если вершина не корневая, то
её ранг никогда не меняется.

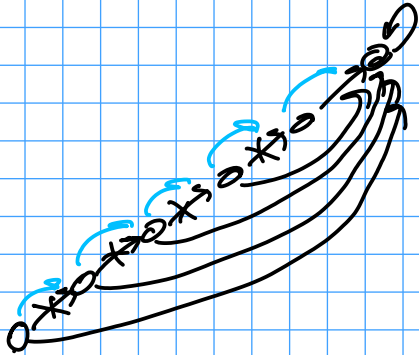
Заметание: после find с шагом 2^k раз от u ↑↑.



m операций find

$$O(m \cdot \log^* n) + O(n \log^* n)$$

переходы по крайним ребрам преобразование операции (монеты)



Среднее: Крускал за $O(E \log^* V)$ или сор. рёбрах