

Список тем и задач для подготовки к контрольной работе.

Темы: компактность, пределы последовательностей, $N(\varepsilon)$, неравенства, рекуррентные последовательности, теорема Штольца.

1. Пусть K_1, K_2, \dots – последовательность компактных множеств в метрическом пространстве X , обладающих следующим свойством: любое конечное пересечение K_i непусто. Докажите, что $\bigcap_{i=1}^{+\infty} K_i$ тоже непусто.

Полезно вспомнить, как доказывалось, что диаметр компакта и расстояние между двумя компактами всегда достигается.

2. Найдите предел и $N(\varepsilon)$ для последовательности $x_n = 2^{\sqrt{n^2+6n-n}}$.

3. Докажите неравенства

$$(n/e)^n < n! < e(n/2)^n.$$

4. Пусть $a > 0$. Докажите, что для последовательности $x_n = a^n n!$ верно

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{x_n} = 1.$$

5. Найдите предел $\sqrt[3]{n^3 + 10n^2} - \sqrt[5]{n^5 - n^4}$.