§ 15. Дифференцирование и интегрирование по параметру несобственных интегралов

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ

1. Дифференцирование несобственного интеграла по параметру. Если функции $f(x;\alpha)$ и $f'_\alpha(x;\alpha)$ непрерывны на множестве

$$G = \{(x;\alpha)\colon\ a \leqslant x < +\infty,\quad \alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2\},$$

интеграл $I(\alpha) = \int\limits_a^{+\infty} f(x;\alpha)\,dx$ сходится при каждом $\alpha \in [\alpha_1;\alpha_2]$, а интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f'_\alpha(x;\alpha)\,dx$ сходится равномерно по α на отрезке $[\alpha_1;\alpha]$, то

$$I'(\alpha) = \int\limits_a^{+\infty} f'_\alpha(x;\alpha)\,dx \qquad (1)$$

при $\alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2$ (*правило Лейбница*).

2. Интегрирование несобственного интеграла по параметру. Если функция $f(x;\alpha)$ непрерывна на множестве

$$G = \{(x;\alpha)\colon\ a \leqslant x < +\infty,\quad \alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2\}$$

и интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x;\alpha)\,dx$ равномерно сходится по α на отрезке $[\alpha_1;\alpha_2]$, то справедлива формула

$$\int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} d\alpha \int\limits_a^{+\infty} f(x;\alpha)\,dx = \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_{\alpha_1}^{\alpha_2} f(x;\alpha)\,d\alpha. \qquad (2)$$

Если $f(x;\alpha) \geqslant 0$ на множестве G, то равенство (2) остается в силе также и для бесконечного промежутка $(\alpha_1;\alpha_2)$ в предположении, что внутренние интегралы в равенстве (2) являются непрерывными функциями и хотя бы одна из частей равенства (2) имеет смысл.

Если функция $f(x;\alpha)$ непрерывна на множестве

$$\widetilde{G} = \{(x;\alpha)\colon\ a \leqslant x < +\infty,\ c \leqslant \alpha < +\infty\},$$

интегралы

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x;\alpha)\,dx \quad \text{и} \quad \int\limits_c^{+\infty} f(x;\alpha)\,d\alpha$$

сходятся равномерно соответственно по α и x на отрезках $[c;\xi]$ и $[a;\eta]$ при каждом фиксированном $\xi \in (c;+\infty)$ и $\eta \in (a;+\infty)$ и если, кроме того, хотя бы один из повторных интегралов

$$\int\limits_c^{+\infty} d\alpha \int\limits_a^{+\infty} |f(x;\alpha)|\,dx, \qquad \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^{+\infty} |f(x;\alpha)|\,d\alpha$$

сходится, то сходятся и равны между собой оба повторных интеграла от функции f, т. е.

$$\int\limits_c^{+\infty} d\alpha \int\limits_a^{+\infty} f(x;\alpha)\,dx = \int\limits_a^{+\infty} dx \int\limits_c^{+\infty} f(x;\alpha)\,d\alpha. \tag{3}$$

При вычислении несобственных интегралов часто используются указанные ниже интегралы (4)–(7).

Если $\alpha > 0$, то для любого $\beta \in R$ справедливы формулы

$$I_1 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos\beta x\,dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2}, \tag{4}$$

$$I_2 = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\sin\beta x\,dx = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}. \tag{5}$$

Формулы (4), (5) можно получить, используя метод интегрирования по частям.

Если функция f непрерывна на промежутке $[0;+\infty)$ и для каждого $A>0$ сходится интеграл $\int\limits_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx$, то при любых $a>0$, $b>0$ справедлива *формула Фруллани*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = f(0)\ln\frac{b}{a}. \tag{6}$$

Если интеграл $\int\limits_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x}\,dx$, где f — непрерывная на промежутке $[a;+\infty)$ функция, расходится, но существует конечный $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(+\infty)$ и, кроме того, сходится интеграл $\int\limits_A^{+\infty} \frac{f(x)-f(+\infty)}{x}\,dx$, то, применив формулу (6) к функции $\widetilde{f}(x) = f(x) - f(+\infty)$, получим равенство

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = (f(0)-f(+\infty))\ln\frac{b}{a}. \tag{7}$$

ПРИМЕРЫ С РЕШЕНИЯМИ

Пример 1. Вычислить *интеграл Дирихле*

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\alpha x}{x}\,dx. \tag{8}$$

▲ Пусть $\alpha > 0$. Рассмотрим интеграл

$$\Phi(\alpha;\beta) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}\,\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx, \quad \beta > 0. \tag{9}$$

При фиксированном $\beta > 0$ интеграл (9) сходится для каждого $\alpha \neq 0$ по признаку Дирихле сходимости несобственных интегралов, так как функция $\frac{1}{x}\,e^{-\beta x}$ убывает на промежутке $(0;+\infty)$, а функция $\sin\alpha x$ имеет при $\alpha \neq 0$ ограниченную первообразную $\left(\int\limits_0^x \sin\alpha t\,dt = \frac{1-\cos\alpha x}{\alpha}\right)$. При $\alpha = 0$ интеграл (9) равен нулю. Кроме того, интеграл

$$K(\alpha;\beta) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}\cos\alpha x\,dx,$$

полученный из (9) дифференцированием по α подынтегральной функции, сходится равномерно по α на R по признаку Вейерштрасса. Используя правило Лейбница (1) и формулу (4), получаем

$$\Phi'_\alpha(\alpha;\beta) = K(\alpha;\beta) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}\cos\alpha x\,dx = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}. \tag{10}$$

Интегрируя на отрезке $[0;\alpha]$ равенство (10), находим

$$\Phi(\alpha;\beta) - \Phi(0;\beta) = \beta\int\limits_0^{\alpha}\frac{dt}{t^2+\beta^2} = \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}.$$

Так как $\Phi(0;\beta) = 0$, то отсюда следует, что при любом $\beta > 0$ справедлива формула

$$\Phi(\alpha;\beta) = \operatorname{arctg}(\alpha/\beta),$$

т. е.

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-\beta x}\,\frac{\sin\alpha x}{x}\,dx = \operatorname{arctg}\frac{\alpha}{\beta}. \tag{11}$$

Вычислим интеграл (8), считая, что $\alpha > 0$. Заметим, что при каждом фиксированном $\alpha > 0$ интеграл (9) сходится равномерно по β на отрезке $[0;1]$, так как функция $\sin\alpha x$ имеет ограниченную первообразную ($\alpha > 0$ фиксировано), а функция $g = e^{-\beta x}/x$ монотонно убывает ($g'_x < 0$ при $x > 0$, $\beta \geqslant 0$) и $g(x;\beta) \rightrightarrows 0$ при $x \to +\infty$ на отрезке $[0;1]$. По признаку Дирихле интеграл (11) сходится равномерно по β на отрезке $[0;1]$. Из равномерной сходимости интеграла (11) и непрерывности функции $e^{-\beta x}\,\frac{\sin\alpha x}{x}$ на множестве

$$G = \{(x;\beta)\colon\ 0 \leqslant x < +\infty,\ 0 \leqslant \beta \leqslant 1\}$$

следует непрерывность по β функций $\Phi(\alpha;\beta)$ на отрезке $[0;1]$ и, в частности, непрерывность по β этой функции справа в точке $\beta = 0$.

Это означает, что в интеграле (11) можно перейти к пределу при $\beta \to +0$ под знаком интеграла. Следовательно,

$$\lim_{\beta \to +0} \int_0^{+\infty} e^{-\beta x} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = \lim_{\beta \to +0} \operatorname{arctg} \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Учитывая, что $\dfrac{\sin \alpha x}{x}$ — нечетная по α функция, получаем

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \operatorname{sign} \alpha, \quad \alpha \in R. \ \blacktriangle \tag{12}$$

Пример 2. Вычислить *интегралы Лапласа*

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\, dx \quad \text{и} \quad K(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2}\, dx.$$

▲ Пусть $\alpha > 0$. Так как функция $\dfrac{\cos \alpha x}{1+x^2}$ непрерывна при любых α и x, а интеграл

$$\int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\cos \alpha x}{1+x^2} \right) dx = -\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2}\, dx$$

сходится равномерно по α на отрезке $[\alpha_0; +\infty)$, где $\alpha_0 > 0$, то, применяя правило Лейбница (1), получаем

$$I'(\alpha) = -\int_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2}\, dx. \tag{13}$$

Складывая почленно равенство (13) с равенством

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x}\, dx, \quad \text{где} \quad \alpha > 0,$$

находим

$$I'(\alpha) + \frac{\pi}{2} = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin \alpha x}{x} - \frac{x \sin \alpha x}{1+x^2} \right) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x(1+x^2)}\, dx.$$

Дифференцируя полученное равенство почленно, имеем

$$I''(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x}{1+x^2}\, dx.$$

Таким образом, функция $I(\alpha)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $I''(\alpha) - I(\alpha) = 0$, общее решение которого имеет вид

$$I(\alpha) = C_1 e^{\alpha} + C_2 e^{-\alpha}. \tag{14}$$

Заметим, что

$$|I(\alpha)| \leqslant I(0) = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}\,.$$

Кроме того $e^{-a} \to 0$ при $\alpha \to +\infty$, а $e^{\alpha} \to +\infty$ при $\alpha \to +\infty$. Отсюда следует, что в формуле (14) $C_1 = 0$, и поэтому $I(\alpha) = C_2 e^{-a}$. Полагая $\alpha = 0$ и учитывая, что $I(0) = \dfrac{\pi}{2}$, получаем $I(\alpha) = \dfrac{\pi}{2}\, e^{-\alpha}$ при $\alpha > 0$. Так как $I(\alpha)$ — четная функция, то

$$I(\alpha) = \frac{\pi}{2}\, e^{-|\alpha|}, \quad \alpha \in R. \tag{15}$$

Из равенства (13) следует, что $I'(\alpha) = -K(\alpha)$. Следовательно,

$$K(\alpha) = -\left(\frac{\pi}{2}\, e^{-\alpha}\right)' = \frac{\pi}{2}\, e^{-\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

т. е.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1 + x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\, e^{-\alpha}, \quad \alpha > 0,$$

откуда в силу нечетности функции $K(\alpha)$ следует, что

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{x \sin \alpha x}{1 + x^2}\, dx = \frac{\pi}{2}\, \operatorname{sign} \alpha \cdot e^{-|\alpha|}, \quad \alpha \in R. \ \blacktriangle \tag{16}$$

Пример 3. Вычислить интеграл *Эйлера–Пуассона* $I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$.

▲ Положим $x = yt$, где $t > 0$ (t — фиксированное число). Тогда $I = \int\limits_0^{+\infty} e^{-y^7 t^2} t\, dy$, откуда

$$I \cdot e^{-t^2} = \int\limits_0^{+\infty} e^{-(y^2+1)t^2} t\, dy. \tag{17}$$

Интегрируя обе части равенства (17) по t на промежутке $[0; +\infty)$, получаем

$$I \cdot \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int\limits_0^{+\infty} dt \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2(1+y^2)} t\, dy. \tag{18}$$

Левая часть (18) равна I^2. Вычислим правую часть K равенства (18), изменив порядок интегрирования:

$$K = \int\limits_0^{+\infty} dy \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2(1+y^2)} t\, dt.$$

Так как

$$\int\limits_0^{+\infty} te^{-t^2(1+y^2)}\, dt = \frac{1}{2} \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2(1+y^2)}\, \frac{d((1+y^2)t^2)}{1+y^2} =$$

$$= -\frac{e^{-t^2(1+y^2)}}{2(1+y^2)}\Bigg|_{t=0}^{t=+\infty} = \frac{1}{2(1+y^2)},$$

то

$$K = \frac{1}{2}\int\limits_0^{+\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Следовательно, $I^2 = K = \pi/4$, откуда $I = \sqrt{\pi}/2$, т. е.

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{19}$$

Перестановка порядка интегрирования в равенстве (18) законна, так как подынтегральная функция $g = te^{-t^2(1+y^2)}$ неотрицательна при $t \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ и непрерывна, интегралы от функции g, взятые по t и y, сходятся равномерно по y и t соответственно на отрезках $[0;\xi]$ и $[0;\eta]$ при любых $\xi > 0$ и $\eta > 0$ (признак Вейерштрасса), а один из повторных интегралов сходится и равен $\pi/4$. ▲

П р и м е р 4. Вычислить *интеграл Лапласа*

$$I(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2\alpha x\, dx.$$

▲ Дифференцируя интеграл $I(\alpha)$ по α, получаем

$$I'(\alpha) = -2\int\limits_0^{+\infty} xe^{-x^2} \sin 2\alpha x\, dx. \tag{20}$$

Применение правила Лейбница законно, так как функция $e^{-x^2}\cos 2\alpha x$ непрерывна при $x \geqslant 0$, $\alpha \in R$, интеграл $I(\alpha)$ сходится при каждом $\alpha \in \in R$, а интеграл в правой части (20) сходится равномерно по α на R (признак Вейерштрасса). Преобразуем равенство (20), применяя метод интегрирования по частям:

$$I'(\alpha) = e^{-x^2} \sin 2\alpha x\Big|_0^{+\infty} - 2\alpha \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2\alpha x\, dx. \tag{21}$$

Из (20) и (21) следует, что $I'(\alpha) = -2\alpha I(\alpha)$ или $\dfrac{dI(\alpha)}{I(\alpha)} = -2\alpha d\alpha$, откуда

$$I(\alpha) = Ce^{-\alpha^2}.$$

Полагая $\alpha = 0$ и учитывая, что $I(0) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ (пример 3), получаем

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2\alpha x\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-\alpha^2}. \ ▲ \tag{22}$$

П р и м е р 5. Вычислить *интегралы Френеля*

$$I = \int\limits_0^{+\infty} \sin x^2\, dx \quad \text{и} \quad I_1 = \int\limits_0^{+\infty} \cos x^2\, dx.$$

▲ Полагая $x^2 = t$, запишем интеграл I в следующем виде:

$$I = \int_0^{+\infty} \sin x^2\, dx = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt. \tag{23}$$

Пусть $t > 0$; тогда справедливо равенство

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-tu^2}\, du, \tag{24}$$

для получения которого достаточно в интеграле $\int\limits_0^{+\infty} e^{-tu^2}\, du$ сделать замену переменной по формуле $\sqrt{t}u = x$ и воспользоваться интегралом (19). Из (23) и (24) следует, что

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \sin t\, dt \int_0^{+\infty} e^{-tu^2}\, du. \tag{25}$$

Меняя порядок интегрирования, получаем

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} du \int_0^{+\infty} e^{-tu^2} \sin t\, dt.$$

Используя формулу (5), находим

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^4}. \tag{26}$$

Вычислим интеграл (26). Заметим, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 dx}{1+x^4} = \int_0^{+\infty} \frac{(1/x^2)\, dx}{1+(1/x)^4} = -\int_{+\infty}^{0} \frac{dt}{1+t^4} = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}.$$

Поэтому

$$2\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4}\, dx = \int_0^{+\infty} \frac{(1+1/x^2)\, dx}{x^2+1/x^2} = \int_0^{+\infty} \frac{d(x-1/x)}{(x-1/x)^2+2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{x-1/x}{\sqrt{2}}\right)\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{\sqrt{2}},$$

откуда $\int\limits_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$. Следовательно,

$$I = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Для обоснования законности перестановки порядка интегрирования в формуле (25) можно воспользоваться (см. (23)) при $\alpha \neq 0$ равенством

$$\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-\alpha^2 t} \frac{\sin t}{\sqrt{t}}\, dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha^2 t} \sin t\, dt \int_0^{+\infty} e^{-tu^2} du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} du \int\limits_0^{+\infty} e^{-t(u^2+\alpha^2)} \sin t\, dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{du}{1+(u^2+\alpha^2)^2}.$$

Переходя здесь к пределу при $\alpha \to 0$ (законность перехода к пределу следует из равномерной сходимости интегралов), получим равенство (26), из которого следует, что

$$\int\limits_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \qquad (27)$$

Аналогично можно доказать, что

$$\int\limits_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \ \blacktriangle \qquad (28)$$

ЗАДАЧИ

1. Пусть $a > 0$, $b > 0$. Применяя формулу Фруллани (6), вычислить интеграл:

1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos^2 ax - \cos^2 bx}{x}\, dx$; 2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^2 ax - \sin^2 bx}{x}\, dx$;

3) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-ax^2} - e^{-bx^2}}{x}\, dx$; 4) $\int\limits_0^{1} \frac{x^a - x^b}{\ln x}\, dx$.

Используя интеграл Дирихле (12), вычислить интеграл (2–4).

2. 1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{1-\cos\alpha x}{x^2}\, dx$; 2) $\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$; 3) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^2}{x}\, dx$;

4) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x^3}{x}\, dx$; 5) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3}\, dx$; 6) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^3}\, dx$.

3. 1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^3 \alpha x}{x}\, dx$; 2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos^2 x}{x}\, dx$; 3) $\int\limits_0^{+\infty} \left(\frac{\sin\alpha x}{x}\right)^3 dx$;

4) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^5 x}{x}\, dx$; 5) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos^4 x}{x}\, dx$; 6) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^7 x}{x}\, dx$.

4. 1) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin x \cos^6 x}{x}\, dx$; 2) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{2\sin\alpha x - \sin 2\alpha x}{x^3}\, dx$;

3) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin^4 \alpha x}{x^2}\, dx$; 4) $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\alpha x - \cos\beta x}{x^2}\, dx$;