Теория категорий

Пределы и копределы

Валерий Исаев

07 сентября 2015 г.

План лекции

Пределы

Копределы

Булевские объекты

Конусы диграмм

- Пусть $J = (V, E)$ – некоторый граф, и D – диграмма формы J в категории $\mathbf{C}$.
- *Конус* диаграммы D – это объект A вместе с коллекцией морфизмов $a_v : A \to D(v)$ для каждой $v \in V$, удовлетворяющие условию, что для любого $e \in E$ следующая диаграмма коммутирует

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "a_{s(e)}"'] \arrow[dr, "a_{t(e)}"] & \\ D(s(e)) \arrow[r, "D(e)"'] & D(t(e)) \end{tikzcd}$$

Определение пределов

- *Предел* диграммы D – это такой конус A, что для любого конуса B существует уникальный морфизм $f : B \to A$, такой что для любой $v \in V$ следующая диаграмма коммутирует

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "f"] \arrow[d, "b_v"'] & A \arrow[dl, "a_v"] \\ D(v) & \end{tikzcd}$$

- Предел D обозначается $lim\ D$.
- Категория называется *полной* (*конечно полной*), если в ней существуют все малые (конечные) пределы.

Примеры пределов

- Произведения – это пределы дискретных диаграмм.
- Бинарные произведения – это пределы диаграмм вида

$$\bullet \qquad \bullet$$

- Уравнители – это пределы диаграмм вида

$$\bullet \rightrightarrows \bullet$$

- Терминальные объекты – это пределы пустой диаграммы.

Уникальность пределов

Proposition

Если A и B – пределы диаграммы D, то существует изоморфизм $f : A \simeq B$, такой что $a_v = b_v \circ f$ для любой $v \in V$.

Доказательство.

Так как B – предел, то существует стрелка $f : A \to B$, удовлетворяющая условию утверждения. Так как A – предел, то существует стрелка $g : B \to A$. По уникальности мы знаем, что $g \circ f = id_A$ и $f \circ g = id_B$, то есть f – изоморфизм. $\square$

Пулбэки

- *Пулбэки* – это пределы диаграмм вида

$$
\begin{tikzcd}
 & \bullet \arrow[d] \\
\bullet \arrow[r] & \bullet
\end{tikzcd}
$$

- Пулбэк можно изображать как коммутативный квадрат

$$
\begin{tikzcd}
A \times_C B \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & B \arrow[d] \\
A \arrow[r] & C
\end{tikzcd}
$$

- Пулбэк иногда называют декартовым квадратом.
- Стрелку $A \times_C B \to A$ называют пулбэком стрелки $B \to C$.

Декартово произведение через пулбэки

Proposition

Если 1 – терминальный объект, то пулбэк $A \times_1 B$ является декартовым произведением $A \times B$.

Доказательство.

Действительно, конус диаграммы $A \qquad B$ – это тоже самое, что и конус диаграммы

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d] \\ A \arrow[r] & 1 \end{tikzcd}$$

Следовательно пределы этих диграмм также совпадают. $\square$

Пулбэки в **Set**

В **Set** пулбэк диаграммы

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

можно определить как подмножество декартова произведения $A \times B$. Действительно, если мы положим $A \times_C B = \{(a, b) \mid f(a) = g(b)\}$, то легко видеть, что $A \times_C B$ является пулбэком диграммы выше.

Пулбэки через уравнители и произведения

Proposition

Если в категории существуют конечные произведения и уравнители, то в ней существуют пулбэки.

Доказательство.

Пулбэки можно сконструировать так же, как и в **Set**. Пусть $e : D \to A \times B$ – уравнитель стрелок $f \circ \pi_1 : A \times B \to C$ и $g \circ \pi_2 : A \times B \to C$. Тогда легко видеть, что квадрат ниже является декартовым.

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "\pi_2 \circ e"] \arrow[d, "\pi_1 \circ e"'] & B \arrow[d, "g"] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

Пределы через уравнители и произведения

Proposition

Если в категории существуют конечные произведения и уравнители, то в ней существуют все конечные пределы.

Доказательство.

Пусть D – диаграмма формы (V, E). Тогда рассмотрим диаграмму, состоящую из пары стрелок

$$\langle \pi_{t(e)} \rangle_{e \in E}, \langle D(e) \circ \pi_{s(e)} \rangle_{e \in E} : \prod_{v \in V} D(v) \rightrightarrows \prod_{e \in E} D(t(e))$$

Конус этой диаграммы – это тоже самое, что конус диаграммы D. Следовательно предел этой диаграммы также является пределом D. $\square$

Прообраз подобъекта

- Пусть $f : A \to C$ – функция в **Set** и $B \subseteq C$.
- Тогда мы можем определить прообраз f:
  $f^{-1}(B) = \{a \in A \mid f(a) \in B\} \subseteq A$.
- Как обобщить эту конструкцию на произвольную категорию?
- *Прообраз* подобъекта $B \hookrightarrow C$ вдоль морфизма $f : A \to C$ – это пулбэк

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(B) \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & B \arrow[d, hook] \\ A \arrow[r, "f"'] & C \end{tikzcd}$$

- Упражнение: докажите, что $f^{-1}(B) \to A$ является мономорфизмом.

Пересечение подобъектов

- Пусть A и B – подмножества C.
- Тогда мы можем определить их пересечение $A \cap B$, которое является подмножеством и A, и B.
- Как обобщить эту конструкцию на произвольную категорию?
- *Пересечение* подобъектов $A \hookrightarrow C$ и $B \hookrightarrow C$ – это пулбэк

$$\begin{tikzcd} A \cap B \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & B \arrow[d, hook] \\ A \arrow[r, hook] & C \end{tikzcd}$$

План лекции

Пределы

Копределы

Булевские объекты

Дуальная категория

Пусть $\mathbf{C}$ – произвольная категория, тогда *дуальная* ей категория $\mathbf{C}^{op}$ – это категория, определяемая следующим образом:

- Объекты $\mathbf{C}^{op}$ совпадают с объектами $\mathbf{C}$.
- Если X, Y – объекты $\mathbf{C}^{op}$, то $Hom_{\mathbf{C}^{op}}(X, Y)$ определяется как $Hom_{\mathbf{C}}(Y, X)$.
- Композиция и тождественные морфизмы определяются так же, как в $\mathbf{C}$.

Дуальность

- В теории категорий зачастую определения и утверждения можно *дуализировать*, применив их в дуальной категории.
- Например, понятие эпиморфизма является дуальным к понятию мономорфизма.

$$f \text{ -- моно: } \; Z \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{f} Y \quad \Longrightarrow \quad g = h$$

$$f \text{ -- эпи: } \; Z \underset{h}{\overset{g}{\leftleftarrows}} X \xleftarrow[f]{} Y \quad \Longrightarrow \quad g = h$$

- Часто к дуальным понятиям прибавляют приставку *ко*. Например, эпиморфизмы можно называть кономорфизмами (или мономорфизмы можно называть коэпиморфизмами).

Копределы

- Копределы – это дуальное понятие к понятию пределов.
- *Коконус* диаграммы D – это объект A вместе с коллекцией морфизмов $a_v : D(v) \to A$ для каждой $v \in V$, удовлетворяющие условию, что для любого $e \in E$ следующая диаграмма коммутирует

$$\begin{tikzcd} D(s(e)) \arrow[r, "D(e)"] \arrow[dr, "a_{s(e)}"'] & D(t(e)) \arrow[d, "a_{t(e)}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

Определение копределов

- *Копредел* диграммы D – это такой коконус A, что для любого коконуса B существует уникальный морфизм $f : A \to B$, такой что для любой $v \in V$ следующая диаграмма коммутирует

$$
\begin{tikzcd}
D(v) \arrow[d, "a_v"'] \arrow[dr, "b_v"] & \\
A \arrow[r, "f"'] & B
\end{tikzcd}
$$

- Копредел D обозначается $colim\ D$.
- Категория называется *кополной* (*конечно кополной*), если в ней существуют все малые (конечные) копределы.

Уникальность копределов

Дуализировать можно не только определения, но и утверждения.

Proposition

Если A и B – копределы диаграммы D, то существует изоморфизм $f : A \simeq B$, такой что $f \circ a_v = b_v$ для любой $v \in V$.

Доказательство.

Так как копредел в $\mathbf{C}$ – это предел в $\mathbf{C}^{op}$, то это утверждение эквивалентно аналогичному утверждению для пределов. $\square$

Начальный объект

- Объект называется *начальным*, если он является копределом пустой диаграммы.
- В **Set** существует единственный начальный объект – пустое множество.
- В **Hask** начальный объект – пустой тип.
- В **Grp** начальный объект – тривиальная группа.

Копроизведения объектов

- *Копроизведение* (*сумма*) объектов A_1 и A_2 – это копредел диаграммы $A_1 \qquad A_2$. Копроизведение обозначается $A_1 \amalg A_2$ либо $A_1 + A_2$.
- В **Set** копроизведение – это размеченное объединение множеств.
- В **Hask** копроизведение – это *Either*.
- В **Grp** копроизведение – свободное произведение.

Фактор-множества

- Пусть $\sim$ – отношение эквивалентности на множестве B.
- Тогда можно определить множество $B/\sim$ классов эквивалентности элементов B по этому отношению.
- Существует каноническая функция $c : B \to B/\sim$, отправляющая каждый $b \in B$ в его класс эквивалентности.
- Если рассматривать отношение $\sim$ как подмножество $B \times B$, то существуют проекции $f, g : \sim \to B$.
- Стрелка c уравнивает f и g и является универсальной с таким свойством.
- Другими словами, c является коуравнителем f и g.

Коуравнители

- В произвольной категории коуравнители можно рассматривать как обобщение этой конструкции.
- Пусть B – абелева группа, A – подгруппа B, $f : A \hookrightarrow B$ – вложенние A в B. Тогда коядро B/A – это коуравнитель стрелок $f, 0 : A \to B$.
- И наоборот, коуравнитель стрелок $f, g : A \to B$ – это коядро $B/Im(f - g)$.
- *Пушауты* – дуальное понятие к понятию пулбэков.

План лекции

Пределы

Копределы

Булевские объекты

Копроизведение $1 \amalg 1$

- В **Set** множество *Bool* можно определить как копроизведение множеств $\{true\}$ и $\{false\}$, каждое из которых является терминальным.
- Копроизведение $1 \amalg 1$ обычно обозначается как 2.
- Можно было бы в произвольной категории определить объект *Bool* как копроизведение $1 \amalg 1$.
- Но это недостаточно сильное определение. Мы не сможем никаких функций над ним определить.

Булевский объект

- Пусть в $\mathbf{C}$ существуют все конечные произведения.
- Тогда *булевский объект* в $\mathbf{C}$ – это объект $Bool$ вместе с парой морфизмов $true, false : 1 \to Bool$, удовлетворяющий следующему условию.
- Для любых $f, g : A \to B$ существует уникальная стрелка $h : Bool \times A \to B$, такая что

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\langle true \circ !_A, id_A \rangle"] \arrow[dr, "f"'] & Bool \times A \arrow[d, "h"] \\ & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\langle false \circ !_A, id_A \rangle"] \arrow[dr, "g"'] & Bool \times A \arrow[d, "h"] \\ & B \end{tikzcd}$$

Булевский объект и 2

- Любой булевский объект является 2.
- Действительно, если в определении булевского объекта в качестве A взять 1, то мы получим в точности универсальное свойство $1 \amalg 1$.
- Следовательно булевский объект уникален с точностью до изоморфизма.
- Но не любой объект, являющийся 2, является булевским.
- Действительно, в категории групп 2 изоморфен 1.
- Но булевский объект изоморфен 1 только в категориях предпорядка.

if

- Мы можем сконструировать морфизм $if : Bool \times (C \times C) \to C$, удовлетворяющий

$$
\begin{tikzcd}
C \times C \arrow[d, "\langle true \circ !, id \rangle"'] \arrow[dr, "\pi_1"] & \\
Bool \times (C \times C) \arrow[r, "if"'] & C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \times C \arrow[d, "\langle false \circ !, id \rangle"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\
Bool \times (C \times C) \arrow[r, "if"'] & C
\end{tikzcd}
$$

- Действительно, в определении $Bool$ возьмем $A = C \times C$, $B = C$, $f = \pi_1$ и $g = \pi_2$.
- Тогда существует уникальная стрелка $Bool \times (C \times C) \to C$, удовлетворяющая условиям выше.