

### Задание 1 (на 07.09).

**ML 1.** Не ссылаясь на теорему Ферма, покажите, что множество всех показателей  $n$ , для которых существует решение уравнения  $x^n + y^n = z^n$  в целых положительных числах, перечислимо. (Как теперь известно, это множество содержит лишь числа 1 и 2).

**ML 2.** Диофантовым называется уравнение, имеющее вид  $P(x_1, \dots, x_n) = 0$ , где  $P$  — многочлен с целыми коэффициентами. Докажите, что множество диофантовых уравнений, имеющих целые решения, перечислимо. (Оно неразрешимо: в этом состоит известный результат Ю. В. Матиясевича, явившийся решением знаменитой «10-й проблемы Гильберта»).

**ML 3.** а) Докажите, что объединение и пересечение перечислимых множеств перечислимо.

б) Докажите, что декартово произведение перечислимых множеств перечислимо.

**ML 4.** Докажите, что всякое бесконечное перечислимое множество содержит бесконечное разрешимое подмножество.

**ML 5.** Приведите пример неразрешимого подмножества  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ , такого что все его горизонтальные и вертикальные сечения (т.е. пересечения с  $\mathbb{N} \times \{x\}$  и с  $\{x\} \times \mathbb{N}$ ) разрешимы.

**ML 6.** Приведите пример множества, которое а) не является перечислимым б) кроме того и его дополнение тоже не является перечислимым.

**ML 7.** Докажите, что непустое множество натуральных чисел разрешимо тогда и только тогда, когда оно есть множество значений всюду определённой неубывающей вычислимой функции с натуральными аргументами и значениями.