k-раскрашиваемые графы. Теорема Брукса

Домашнее задание №12

1 декабря 2017 г.

Обязательная часть

1. (1.5 балла). Доказать, что для любого простого графа G на n вершинах выполнены следующие неравенства:

$$\chi(G) + \chi(\overline{G}) \leqslant n + 1; \qquad \chi(G) \cdot \chi(\overline{G}) \geqslant n.$$

2. (1 балл). Пусть $(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ есть степенная последовательность простого связного графа G. Доказать, что

$$\chi(G) \leqslant 1 + \max_i \min\{d_i, i - 1\}.$$

3. (1.5 балла). Рассмотрим множество прямых на плоскости, никакие три из которых не пересекаются в одной точке. Образуем граф G, вершинами которого будут являться точки пересечения этих прямых, а ребрами — отрезки, соединяющие две соседние точки пересечения на одной прямой. Доказать, что $\chi(G) \leqslant 3$.

4. (1.5 балла). Пусть l есть длина максимального пути в графе G. Доказать, что $\chi(G) \leqslant l$.

5. (1.5 балла). Доказать, что для графа G, в котором любая пара нечетных циклов пересекается хотя бы по одной вершине, хроматическое число $\chi(G) \leqslant 5$.

6. (1 балл). Доказать, что если $\chi(G - x - y) = \chi(G) - 2$ для любой пары вершин графа G, то G представляет собой полный граф, построенный на $n = \chi(G)$ вершинах.

7. (1 балл). Доказать, что для любой правильной окраски графа G с $\chi(G) = k$ в k цветов для любого цвета i найдется вершина x, окрашенная в этот цвет, которая смежна с вершинами, окрашенными во все оставшиеся $k - 1$ цветов.

8. (1 балл). Описать все k-критические графы для значений параметра k, равных $k = 1$, $k = 2$ и $k = 3$.

9. (1 балл). Пусть G есть k-критический граф. Доказать следующие утверждения.

   (a) Для произвольной вершины $x \in V(G)$ существует правильная раскраска G в k цветов, в которой вершина x окрашена в цвет, не встречающийся при окраске других вершин, а все остальные цвета встречаются при окраске подмножества $N(x)$ ее соседей.

   (b) Для произвольного ребра $e \in E(G)$ в любой правильной окраске графа $G - e$ в $k - 1$ цвет концевые вершины e оказываются окрашенными в один и тот же цвет.

10. (1 балл). Доказать, что в случае k-критического графа $\delta(G) \geqslant k-1$.

11. (1.5 балла). Пусть x и y есть пара вершин k-критического графа G. Доказать, что ни одно из двух подмножеств $N(x)$ и $N(y)$ смежных с x и y вершин не может быть вложенным в другое. Используя это утверждение, показать, что не существует k-критического графа, построенного на $k+1$ вершине.