Теорвер 180503

Швецова Анна

May 3, 2018

Задачи на зачёт по теор. веру.

1. Элементарные вероятности (сх. Лапласа)
2. Условные вероятности, схема Бернулли
3. Распределение величин и векторов
4. Моменты
5. Характеристические и произв. функции
6. Предельные теоремы

Разбор предыдущей домашки

1. $\xi_k = \begin{cases} 2^k, \frac{1}{2^{k+1}} \\ 0, 1-2^k \\ -2^k, \frac{1}{2^{k+1}} \end{cases}$

   $E\xi_k = 0$, $D\xi_k = E(\xi_k^2) = 2^k$

   $\sqrt{DS_n} \sim 2^{\frac{n+1}{2}}$

   Давайте заметим, что начиная с некоторого места все будут равны 0 с вероятностью 1. Найдём то место среди ξ_k, после которого будут простые нули.

   $P(\frac{S_n}{n} < \varepsilon) \geq P(\xi_k = \xi_{k+1} = \ldots = 0)$ (т.е. все с номера k равны 0).

   $k := [\log_2(\varepsilon)] - 1$.

   $P(\text{есть не ноль}) \leq \sum_{j=k}^{\infty} P(\xi_j \neq 0) = \sum_k \frac{1}{2^j} \underset{k\to\infty}{\to} 0$

   Тогда $P(\xi_k = \xi_{k+1} = \ldots = 0) \to 1$

   Получили ЗБЧ, но не ЦПТ т.к. при ЦПТ оно должно уходить в нормальное распределение, а не в 0.

2. $\xi_k = \begin{cases} 1, p \\ -1, q = 1-p \end{cases}$

   $\sum_1^{\infty} \frac{\xi_k}{k} =?$

Помотрим на моменты:

$E\xi_k = p - q$, $ES_n = (p-q)\sum_1^n \frac{1}{k}$ – расходится

$D\xi_k = 1 - (p-q)^2 = 4pq$, $DS_n = 4pq \sum_1^n \frac{1}{k^2}$.

Тогда при $p \neq q$ мы получаем, что матожидание уходит в бесконечность, а дисперсия конечна. Тогда неравенством Чебышёва получим, что хотели.

Теперь рассимотрим $q = p = \frac{1}{2}$.

$\varphi_{S_n} = \Pi_{k=1}^n \cos(\frac{t}{k})$

Прологарифмируем.

Попробуем там получить что-то по признаку Коши.

$\ln(\Pi_{k=m}^{m+n} \cos(\frac{t}{k})) = \sum \ln(\cos\frac{t}{k}) = \sum \ln(1-(1-\cos\frac{t}{k})) \sim -\sum(1-\cos\frac{t}{k}) \sim -\sum_m^{m+n} \frac{t^2}{2k^2} \underset{n,m\to\infty}{\to} 0$

Значит, ряд сходится и предельное распределение есть. Нормально ли оно?

$\varphi_{S_n} = \Pi_{k=1}^n \cos(\frac{t}{k}) \to \Pi_1^\infty \cos\frac{t}{k} \stackrel{?}{=} e^{-\frac{b^2t^2}{2}}$

Нет, не нормально. Т.к. у cos бесконечно много нулей, а у e^x их нет.

3. n вытааскиваний из $\{1, 2, \dots n\}$ с повторениями.

   ξ_n – доля непоявившихся номеров.

   Три подхода: посмотреть моменты, посмотреть на характеристическую функцию или смотреть глубже.

   $\xi_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n(\text{карты } k \text{ нету})$

   $E\xi_n = \frac{1}{n}n(\frac{n-1}{n})^n \to e^{-1}$.

   $cov(\eta, \xi) = E(\eta\xi) - E\eta E\xi$.

   $D\xi_n = \frac{1}{n^2}\sum cov(1_i, 1_j) = \frac{1}{n^2}(n(\frac{n-1}{n})^n(1 - (\frac{n-1}{n})^n) + (n^2-n)((\frac{n-2}{n})^n - (\frac{n-1}{n})^{2n}) \to 0$ – левое слагаемое – дисперсии, правое – оставшиеся $n^2 - n$ слагаемых матрицы.

   Левое слагаемое сходится к 0, а слагаемые правого слагаемого сходятся к e^{-2} и противоположны по знаку.

   Если у последовательности величин матожидание сходится к константе, а дисперсия к 0, то последовательность сходится к константе по вероятности и по распределению.