Определение. Метрическое пространство (X, ρ) называется сепарабельным, если существует некоторое конечное или счетное подмножество $Y \subset X$, плотное в X (то есть $\mathrm{cl}(Y) = X$).

Определение. Последовательность точек x_n метрического пространства (X, ρ) называется фундаментальной (или последовательностью Коши), если для любого $\varepsilon > 0$ существует некоторое $N \in \mathbb{N}$, такое что для любых $n, m > N$ выполнено неравенство $\rho(x_n, x_m) < \varepsilon$.

Определение. Метрическое пространство (X, ρ) называется полным, если для любой фундаментальной последовательности $x_n \in X$ найдется точка $x \in X$, такая что $\rho(x_n, x) \to 0$.

1. (1) Докажите, что сепарабельное метрическое пространство может быть покрыто счетным объединением шаров радиуса 1.

2. (2) Доказать, что если $A \subset \mathbb{R}^2$ — несчетное множество, то множество A' его предельных точек не пусто.

3. а) (1) Докажите, что ограниченная последовательность вещественных чисел имеет предел тогда и только тогда, когда она имеет единственный частичный предел (предел подпоследовательности).

б) (1) Докажите, что множество частичных пределов любой последовательности вещественных чисел замкнуто.

4. а) (1) Докажите, что если $X_1 \subset X$ и пространство (X, ρ) сепарабельно, то пространство (X_1, ρ) тоже сепарабельно.

б) (1) Пусть X_n — последовательность подмножеств (X, ρ), такая что (X_n, ρ) сепарабельны, а $\cup X_n$ плотно в X. Докажите, что (X, ρ) сепарабельно.

5. (2) Докажите, что если метрическое пространство сепарабельно, то любое его открытое подмножество представляется в виде счетного объединения шаров.

6. Пусть p — простое число. Для $x \in \mathbb{Q}, x \neq 0$ определим $\|x\|_p = p^{-n}$, где число x представлено в виде $x = p^n \frac{a}{b}$, где $a, b, n \in \mathbb{Z}$ и a, b не делятся на p. Положим $\|0\|_p = 0$.

а) (1) Докажите, что функция $\rho_p(x, y) = \|x - y\|_p$ является метрикой на множестве $\mathbb{Q}$.

б) (4) Является ли метрическое пространство $(\mathbb{Q}, \rho_p)$ полным?

7. Верно ли, что последовательность вложенных шаров в полном метрическом пространстве всегда имеет непустое пересечение, если

а) (1) шары открытые, и их радиусы стремятся к 0?

б) (2) шары замкнутые, и их радиусы стремятся к нулю?

в) (3) шары замкнутые, а радиусы необязательно стремятся к 0?

8. (4) Полное метрическое пространство представлено в виде счетного объединения замкнутых множеств. Докажите, что хотя бы одно из них имеет непустую внутренность.