Задачи по алгебраическим структурам

В задачах 1,2,3 M — моноид.

1. Пусть $1, 1'$ — нейтральные элементы в M (т.е. $\forall m\in M\ (m\cdot 1=1\cdot m=m)$ и $\forall m\in M\ (m\cdot 1'=1'\cdot m=m)$); докажите, что $1=1'$.

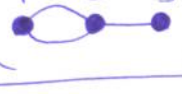
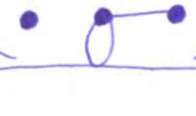
2. Пусть $m\in M$ и $\tilde{m}, \tilde{m}'$ — обратные элементы по отношению к m (т.е. $m\tilde{m}=\tilde{m}m=1$ и $m\tilde{m}'=\tilde{m}'m=1$); докажите, что $\tilde{m}=\tilde{m}'$.

3. (Напоминаю, что $M^{\times}=\{m\in M \mid \exists \tilde{m}\in M\ (m\tilde{m}=\tilde{m}m=1)\}$.) Докажите, что $\forall m_1, m_2\in M^{\times}\ (m_1 m_2\in M^{\times})$.

4. Перечислите явно элементы множеств $(\mathbb{Z}/4)^{\times}$, $(\mathbb{Z}/5)^{\times}$, $(\mathbb{Z}/6)^{\times}$, $(\mathbb{Z}/8)^{\times}$ (рассматриваются моноиды относительно умножения).

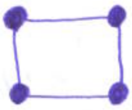
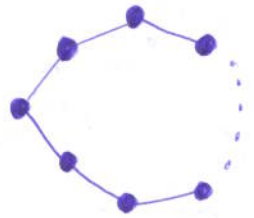
Def Пусть Γ — граф (возможно, с кратными рёбрами и петлями) с множеством вершин V. Биекция $f\in \mathrm{Bij}(V)$ называется *автоморфизмом* графа Γ, если для любых вершин $v_1, v_2\in V$ кратность ребра между v_1 и v_2 равна кратности ребра между $f(v_1)$ и $f(v_2)$. (В частности, вершины с петлями под действием f должны переходить в вершины с петлями.) Автоморфизмы графа Γ образуют группу относительно композиции; она обозначается $\mathrm{Aut}(\Gamma)$.

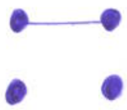
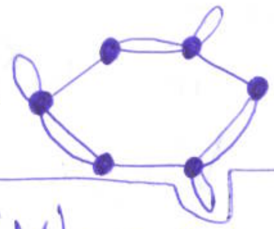
Примеры. Aut(полный граф на множестве V) $=$ Aut(граф без рёбер на множестве V) $=\mathrm{Bij}(V)$.

Aut() $=\mathrm{Aut}$() $=\{\mathrm{id}_{\{1,2,3\}}\}$.

⑤ Опишите группы $\mathrm{Aut}(\Gamma)$ и найдите их порядки для следующих графов Γ:

а) $\Gamma =$  ;
(цепь из n вершин)

б) $\Gamma =$  ; г) $\Gamma =$  (цикл из n вершин);

в) $\Gamma =$  ; д) $\Gamma =$  .

<u>Def</u> Пусть M — моноид и $|M| = n < \infty$. Занумеруем элементы моноида M: $M = \{m_1, m_2, m_3, \dots, m_n\}$. Таблица Кэли моноида M — это таблица размера $n \times n$ следующего вида:

$$\begin{array}{c|ccccc} & m_1 & m_2 & \dots & m_j & \dots\ m_n \\ \hline m_1 & & & & \vdots & \\ m_2 & & & & \vdots & \\ \vdots & & & & \vdots & \\ m_i & \dots & \dots & \dots & m_i m_j & \\ \vdots & & & & & \\ m_n & & & & & \end{array}$$

на пересечении строки, соответствующей элементу m_i, и столбца, соответствующего элементу m_j, стоит $m_i m_j$.

<u>Пример.</u> Таблица Кэли группы $(\mathbb{Z}/4)^+$ (по сложению):

	0	**1**	**2**	**3**
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

.

---

⑥ Нарисуйте таблицы Кэли моноидов $\mathbb{Z}/4$, $\mathbb{Z}/5$, $\mathbb{Z}/6$ по умножению.

(Задачи 1,2,4 были сформулированы на лекции; задачи 3,5,6 новые.)