

Теория категорий

Категориальная логика

Валерий Исаев

28 апреля 2017 г.

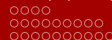
Логика и теория типов

Интерпретация логических теорий

Логика первого порядка

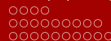
Интерпретация

Корректность интерпретации



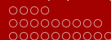
Логика, теория типов и теория категорий

Logic	Type theory	Category
algebraic	$\top + \times$	Cartesian
	$\top + \times + \rightarrow$	Cartesian closed
essentially algebraic	$\top + \Sigma + Id$	finitely complete
	$\top + \Sigma + Id + \Pi$	LCC
regular ($=, \wedge, \top, \exists$)	$\top + \Sigma + Id + \parallel - \parallel$	regular
coherent (reg, \perp, \vee)	$reg + 0 + \vee$	coherent
first order ($coh, \rightarrow, \forall$)	$coh + \forall + \text{implications}$	Heyting
higher order	$\top + \Sigma + Id + \rightarrow + Prop$	elementary topos



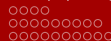
Замечания

- ▶ Пусть T – теория типов из второго столбца. Тогда существуют эквивалентности категорий $T\text{-Mod} \simeq C \simeq L$, где C – категория категорий из третьего столбца, а L – категория теорий из первого.
- ▶ Все теории в первом столбце мультисортные.
- ▶ Теории в столбце Logic перечислены в порядке возрастания числа логических связок в них; каждая последующая строчка включает предыдущую.
- ▶ Все теории типов, начиная с третьей строчки, включают аксиому K .
- ▶ LCC – это локально декартово замкнутые категории, то есть такие категории C , что для любого объекта X категория C/X – декартово замкнута.



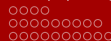
Замечания

- ▶ `reg` и `coh` – это теории, соответствующие строчкам `regular` и `coherent` соответственно.
- ▶ `quotients` – это фактор-типы, которые являются частным случаем HITs для множеств.
- ▶ `implications` – это частный случай типа функций, который определен только для утверждений.
- ▶ \rightarrow , Π , \forall и `implications` включают функциональную экстенциональность.
- ▶ `Prop` включает пропозициональную экстенциональность.
- ▶ Последняя строчка включает все предыдущие, даже те, для которых нет записи в первом столбце.



Интерпретации теорий

- ▶ Мы уже видели как проинтерпретировать $T + \times$ в декартовой категории, а $T + \times + \rightarrow$ в декартово замкнутой категории.
- ▶ Мы (почти) увидим как каждую из теорий типов проинтерпретировать в соответствующей категории.
- ▶ Для любой логической теории можно определить понятие модели в **Set**. Это обычное понятие модели.
- ▶ Но можно определить модели теории и в других категориях, если они удовлетворяют определенным условиям.
- ▶ Конкретно, для любой теории из первого столбца можно определить категорию моделей в любой категории, удовлетворяющей соответствующему условию из третьего.



Модели теорий

- ▶ Например, мы можем определить категории моноидов, групп, колец, и так далее в любой декартовой категории.
- ▶ Так как аксиомы полей используют \perp , \exists и \forall , то поля можно определить в любой когерентной категории.
- ▶ Если отождествить логическую теорию с соответствующей ей категорией C , то модели C в категории D – это просто функторы $C \rightarrow D$, которые сохраняют дополнительную структуру из той строчки таблицы, в которой находятся C и D .

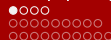
Логика и теория типов

Интерпретация логических теорий

Логика первого порядка

Интерпретация

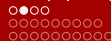
Корректность интерпретации



Сигнатуры логики первого порядка

Сигнатура $\Sigma = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ логики первого порядка состоит из:

- ▶ Множества \mathcal{S} , называемого множеством *сортов*.
- ▶ Множества \mathcal{F} , называемого множеством *функциональных символов*. Каждому функциональному символу $f \in \mathcal{F}$ приписана сигнатура вида $f : s_1 \times \dots \times s_n \rightarrow s$, где $s_1, \dots, s_n, s \in \mathcal{S}$.
- ▶ Множества \mathcal{P} , называемого множеством *предикатных символов*. Каждому предикатному символу $R \in \mathcal{P}$ приписана сигнатура вида $R : s_1 \times \dots \times s_n$, где $s_1, \dots, s_n \in \mathcal{S}$.



Термы логики первого порядка

Для каждого сорта $s \in \mathcal{S}$ выбирается счетное множество переменных V_s . Теперь мы можем определить множество $Term_{\Sigma}(V)_s$ термов сорта s индуктивным образом:

- ▶ Если $x \in V_s$, то $x \in Term_{\Sigma}(V)_s$.
- ▶ Если $a_i \in Term_{\Sigma}(V)_{s_i}$ и $(f : s_1 \times \dots \times s_n \rightarrow s) \in \mathcal{F}$, то $f(a_1, \dots, a_n) \in Term_{\Sigma}(V)_s$.

Конструкцию термов можно доопределить до функтора $Term_{\Sigma} : \mathbf{Set}^{\mathcal{S}} \rightarrow \mathbf{Set}^{\mathcal{S}}$. Более того, на этом функторе существует естественная структура монады. Упражнение: определите эту структуру.



Формулы логики первого порядка

Пусть, как и раньше, $V \in \mathbf{Set}^{\mathcal{S}}$. Теперь мы определим множество $Form_{\Sigma}(V)$ формул индуктивным образом:

- ▶ Если $a_i \in Term_{\Sigma}(V)_{s_i}$ и $(R : s_1 \times \dots \times s_n) \in \mathcal{P}$, то $R(a_1, \dots, a_n) \in Form_{\Sigma}(V)$. Формулы такого вида называются *атомарными*.
- ▶ $\perp, \top \in Form_{\Sigma}(V)$.
- ▶ Если $\varphi \in Form_{\Sigma}(V)$, то $\neg\varphi \in Form_{\Sigma}(V)$.
- ▶ Если $\varphi, \psi \in Form_{\Sigma}(V)$, то $\varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \varphi \rightarrow \psi \in Form_{\Sigma}(V)$.
- ▶ Если $\varphi \in Form_{\Sigma}(V \cup \{x : s\})$, то $\forall(x : s)\varphi, \exists(x : s)\varphi \in Form_{\Sigma}(V)$.



Теории логики первого порядка

- ▶ Теория логики первого порядка состоит из сигнатуры Σ и множества аксиом вида $\varphi \vdash \psi$.
- ▶ Когда мы рассматриваем логики, более слабые, чем первого порядка, то мы можем ограничить формулы и/или секвенции, которые можно использовать.
- ▶ О секвенции $\varphi \vdash \psi$ можно думать как о формуле $\forall x_1 \dots x_n (\varphi \rightarrow \psi)$.
- ▶ Если в логике есть импликация, то секвенции можно заменить одной формулой.
- ▶ Если в логике еще есть квантор всеобщности, то можно считать, что эта формула замкнута.
- ▶ Таким образом, теории в логике первого порядка обычно определяют как множество замкнутых формул.



Интерпретация сигнатуры

Пусть \mathbf{C} – декартова категория. Тогда интерпретация сигнатуры $(\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ в \mathbf{C} состоит из следующих данных:

- ▶ Функция $\llbracket - \rrbracket : \mathcal{S} \rightarrow \text{Ob}(\mathbf{C})$.
- ▶ Функция $\llbracket - \rrbracket$, сопоставляющая каждому $(\sigma : s_1 \times \dots \times s_n \rightarrow s) \in \mathcal{F}$ морфизм $\llbracket \sigma \rrbracket : \llbracket s_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket s_n \rrbracket \rightarrow \llbracket s \rrbracket$.
- ▶ Функция $\llbracket - \rrbracket$, сопоставляющая каждому $(R : s_1 \times \dots \times s_n) \in \mathcal{P}$ мономорфизм $\llbracket R \rrbracket : d_R \rightarrow \llbracket s_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket s_n \rrbracket$.



Интерпретация термов

Пусть \mathbf{C} – декартова категория и $\llbracket - \rrbracket$ – некоторая интерпретация сигнатуры $(\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. Если t – терм этой сигнатуры сорта s со свободными переменными в $\{x_1 : s_1, \dots, x_n : s_n\}$, то мы можем определить его интерпретацию $\llbracket t \rrbracket : \llbracket s_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket s_n \rrbracket \rightarrow \llbracket s \rrbracket$ следующим образом:

- ▶ $\llbracket x_j \rrbracket = \pi_j$.
- ▶ $\llbracket \sigma(t_1, \dots, t_n) \rrbracket = \llbracket \sigma \rrbracket \circ \langle \llbracket t_1 \rrbracket, \dots, \llbracket t_n \rrbracket \rangle$.



Модели алгебраических теорий

- ▶ Пусть \mathcal{A} – алгебраическая теория, то есть множество аксиом вида $t_1 = t_2$.
- ▶ Тогда модель этой теории в декартовой категории \mathbf{C} – это интерпретация сигнатуры теории, такая что для любой аксиомы $t_1 = t_2$ верно $\llbracket t_1 \rrbracket = \llbracket t_2 \rrbracket$.



Интерпретация формул в **Set**

- ▶ Прежде чем описать интерпретацию формул в произвольной конечно полной категории, вспомним как она описывается в **Set**.
- ▶ В **Set** формулы интерпретируются как подмножества.
- ▶ Пусть $\llbracket - \rrbracket$ сопоставляет каждому $(R : s_1 \times \dots \times s_n) \in \mathcal{S}$ подмножество множества $\llbracket s_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket s_n \rrbracket$.
- ▶ Пусть $V = x_1 : s_1, \dots, x_k : s_k$ – упорядоченное множество переменных. Тогда функция интерпретации $\llbracket - \rrbracket$ сопоставляет каждой формуле из $Form_{\Sigma}(V)$ подмножество множества $\llbracket s_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket s_k \rrbracket$.



Интерпретация формул в **Set**

- ▶ $\llbracket \perp \rrbracket$ – пустое подмножество.
- ▶ $\llbracket \top \rrbracket$ – всё множество.
- ▶ $\llbracket \neg \varphi \rrbracket$ – дополнение подмножества $\llbracket \varphi \rrbracket$.
- ▶ $\llbracket \varphi \wedge \psi \rrbracket = \llbracket \varphi \rrbracket \cap \llbracket \psi \rrbracket$.
- ▶ $\llbracket \varphi \vee \psi \rrbracket = \llbracket \varphi \rrbracket \cup \llbracket \psi \rrbracket$.
- ▶ Упражнение: опишите интерпретацию импликации, кванторов и равенства.



Истинность формул в **Set**

- ▶ Интерпретация замкнутой формулы – это подмножество одноэлементного множества.
- ▶ Следовательно, либо одноэлементное множество, либо пустое.
- ▶ В первом случае говорят, что эта формула *истинна* в этой интерпретации, во втором, что она *ложна*.



Интерпретация формул в конечно полной категории

- ▶ Пусть \mathbf{C} – конечно полная категория.
- ▶ Тогда формулы со свободными переменными в V интерпретируются как подобъекты $\llbracket V \rrbracket$.
- ▶ Если $\llbracket t_1 \rrbracket, \llbracket t_2 \rrbracket : \llbracket s_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket s_n \rrbracket \rightarrow \llbracket s \rrbracket$, то формула $t_1 = t_2$ интерпретируется как уравнитель $\llbracket t_1 \rrbracket$ и $\llbracket t_2 \rrbracket$.
- ▶ Формула $\varphi = R(t_1, \dots, t_k)$ интерпретируется как пулбэк $\llbracket R \rrbracket$:

$$\begin{array}{ccc}
 d_\varphi & \xrightarrow{\quad} & d_R \\
 \downarrow \lrcorner & & \downarrow \llbracket R \rrbracket \\
 \llbracket V \rrbracket & \xrightarrow{\langle \llbracket t_1 \rrbracket, \dots, \llbracket t_k \rrbracket \rangle} & \llbracket s_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket s_k \rrbracket
 \end{array}$$



Истинность секвенций

- ▶ Мы будем говорить, что секвенция $\varphi \vdash \psi$ истина в некоторой интерпретации $\llbracket - \rrbracket$, если подобъект $\llbracket \varphi \rrbracket$ является подобъектом $\llbracket \psi \rrbracket$.
- ▶ В частности мы можем говорить, что формула ψ истина, если истина секвенция $\top \vdash \psi$; другими словами, если $\llbracket \psi \rrbracket$ – максимальный подобъект, то есть изоморфизм.
- ▶ Модель некоторой теории логики первого порядка – это интерпретация, такая что все аксиомы в ней истинны.



Интерпретация \top и \wedge

- ▶ \top интерпретируется как максимальный объект.
- ▶ Наибольший подобъект объекта X – это id_X .
- ▶ $\varphi \wedge \psi$ интерпретируется как пересечение подобъектов $[[\varphi]]$ и $[[\psi]]$.



Корректность \top

- ▶ Разумеется мы хотим, чтобы интерпретация уважала правила вывода.
- ▶ Правило вывода для \top :

$$\varphi \vdash \top$$

- ▶ Чтобы доказать, что эта аксиома всегда корректна, нужно проверить, что для любой подобъект $d_\varphi \hookrightarrow V$ является подобъектом $\llbracket \top \rrbracket = id_V : V \hookrightarrow V$, что очевидно.



Корректность \wedge

- ▶ Правила вывода для \wedge :

$$\frac{\varphi \vdash \psi \quad \varphi \vdash \chi}{\varphi \vdash \psi \wedge \chi}$$

$$\frac{\varphi \vdash \psi \wedge \chi}{\varphi \vdash \psi} \quad \frac{\varphi \vdash \psi \wedge \chi}{\varphi \vdash \chi}$$

- ▶ Эти правила уважаются, так как по определению пулбэков стрелка $\llbracket \varphi \rrbracket \rightarrow \llbracket \psi \rrbracket \cap \llbracket \chi \rrbracket$ существует тогда и только тогда, когда существуют стрелки $\llbracket \varphi \rrbracket \rightarrow \llbracket \psi \rrbracket$ и $\llbracket \varphi \rrbracket \rightarrow \llbracket \chi \rrbracket$.



Интерпретация \exists

- ▶ Теории, в которых формулы состоят только из равенств, конъюнкций, \top и \exists называются *регулярными*.
- ▶ Мы не можем проинтерпретировать \exists в произвольной конечно полной категории.
- ▶ Категории, где можно это сделать, называются *регулярными*.
- ▶ Формальное определение будет дано ниже.



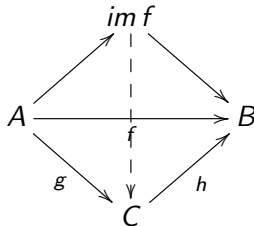
Интерпретация \exists в **Set**

- ▶ Пусть $\llbracket \varphi(x, x_1, \dots, x_n) \rrbracket : d_\varphi \hookrightarrow \llbracket s \rrbracket \times \llbracket s_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket s_n \rrbracket$.
- ▶ Как проинтерпретировать $\exists(x : s)(\varphi(x, x_1 \dots x_n))$?
- ▶ Если рассмотреть $\pi_{1, \dots, n} \circ \llbracket \varphi \rrbracket : d_\varphi \rightarrow \llbracket s_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket s_n \rrbracket$, то это почти дает нам интерпретацию $\exists(x : s)(\varphi(x, x_1, \dots, x_n))$, так как прообраз некоторого элемента (a_1, \dots, a_n) населен тогда и только тогда, когда существует $a \in \llbracket s \rrbracket$, такой что $(a, a_1, \dots, a_n) \in \llbracket \varphi \rrbracket$.
- ▶ Единственная проблема заключается в том, что $\pi_{1, \dots, n} \circ \llbracket \varphi \rrbracket$ не является мономорфизмом.
- ▶ Мы можем решить эту проблему, определив интерпретацию $\exists(x : s)(\varphi(x, x_1, \dots, x_n))$ как образ $\pi_{1, \dots, n} \circ \llbracket \varphi \rrbracket$.



Образ морфизма

- ▶ Мы можем обобщить понятие образа функции на произвольную категорию.
- ▶ Образ морфизма $f : A \rightarrow B$ – это наименьший мономорфизм $im f \hookrightarrow B$, через который f факторизуется.
- ▶ Другими словами, существует стрелка $A \rightarrow im f$, такая что для любых стрелок $g : A \rightarrow C$ и $h : C \hookrightarrow B$ если $h \circ g = f$, то $im f$ является подобъектом C :





Интерпретация существования

- ▶ В произвольной категории образ может не существовать, но он уникален, если существует.
- ▶ Если предположить, что в категории существуют образы, то можно попробовать проинтерпретировать существование так же как и в **Set**.
- ▶ Если $\llbracket \varphi(x, x_1, \dots, x_n) \rrbracket : d_\varphi \hookrightarrow \llbracket s \rrbracket \times \llbracket s_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket s_n \rrbracket$, то мы определяем $\llbracket \exists(x : s)\varphi \rrbracket$ как образ $\pi_{1, \dots, n} \circ \llbracket \varphi \rrbracket$.



Интерпретация подстановки

- ▶ Так как правила вывода для существования используют подстановку, нам нужно знать как она интерпретируется, чтобы проверить эти правила.
- ▶ Утверждено: если φ – формула со свободными переменными в $\{x_1 : s_1, \dots, x_n : s_n\}$ и t_1, \dots, t_n – термы сортов s_1, \dots, s_n , то $\llbracket \varphi[x_1 := t_1, \dots, x_n := t_n] \rrbracket$ является пулбэком d_φ :

$$\begin{array}{ccc}
 d_{\varphi[x_1 := t_1, \dots, x_n := t_n]} & \xrightarrow{\quad} & d_\varphi \\
 \llbracket \varphi[x_1 := t_1, \dots, x_n := t_n] \rrbracket \downarrow & & \downarrow \llbracket \varphi \rrbracket \\
 V & \xrightarrow{\langle t_1, \dots, t_n \rangle} & \llbracket s_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket s_n \rrbracket
 \end{array}$$



Интерпретация подстановки

- ▶ Доказывать это утверждение мы будем индукцией по φ .
- ▶ Для \top это очевидно, так как пулбэк тождественного морфизма – тождественный морфизм.
- ▶ Проверим для равенства. Пусть $\llbracket t \rrbracket, \llbracket t' \rrbracket : \llbracket s_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket s_n \rrbracket \rightarrow \llbracket s' \rrbracket$ и $\llbracket t_i \rrbracket : V \rightarrow \llbracket s_i \rrbracket$. Тогда нужно показать, что морфизм $E \rightarrow V$ в диаграмме ниже является уровнем $\llbracket t \rrbracket \circ \langle \llbracket t_1 \rrbracket, \dots, \llbracket t_n \rrbracket \rangle$ и $\llbracket t' \rrbracket \circ \langle \llbracket t_1 \rrbracket, \dots, \llbracket t_n \rrbracket \rangle$, что легко сделать, используя универсальное свойство пулбэков.

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{\quad} & d_{t=t'} \\
 \downarrow \lrcorner & & \downarrow \llbracket t=t' \rrbracket \\
 V & \xrightarrow{\langle \llbracket t_1 \rrbracket, \dots, \llbracket t_n \rrbracket \rangle} & \llbracket s_1 \rrbracket \times \dots \times \llbracket s_n \rrbracket \xrightarrow[\llbracket t' \rrbracket]{\llbracket t \rrbracket} \llbracket s' \rrbracket
 \end{array}$$



Интерпретация подстановки в \exists

- ▶ Даже если в категории существуют образы всех морфизмов, они могут не коммутировать с пулбэками.
- ▶ Категория называется *регулярной*, если у всех морфизмов существуют образы, и они стабильны относительно пулбэков.
- ▶ Таким образом, в любой регулярной категории подстановка действительно интерпретируется как пулбэк.



Корректность интерпретации \exists

- ▶ Правила вывода для \exists :

$$\frac{\exists(x : s)\varphi \vdash \psi}{\varphi \vdash \psi} \qquad \frac{\varphi \vdash \psi}{\exists(x : s)\varphi \vdash \psi}$$

- ▶ Обратите внимание, что ψ определен в контексте x_1, \dots, x_n , но используется также и в контексте x_1, \dots, x_n, x . По лемме об интерпретации подстановки ψ во втором контексте интерпретируется как пулбэк.
- ▶ Используя этот факт, легко показать, что данные правила корректны.