Теория категорий

Категориальная логика

Валерий Исаев

28 апреля 2017 г.

План лекции

Логика и теория типов

Интерпретация логических теорий

- Логика первого порядка
- Интерпретация
- Корректность интерпретации

Логика, теория типов и теория категорий

Logic	Type theory	Category
algebraic	$\top + \times$	Cartesian
	$\top + \times + \to$	Cartesian closed
essentially algebraic	$\top + \Sigma + Id$	finitely complete
	$\top + \Sigma + Id + \Pi$	LCC
regular ($=$, $\wedge$, $\top$, $\exists$)	$\top + \Sigma + Id + \| - \|$	regular
coherent (reg, $\bot$, $\vee$)	reg $+ 0 + \vee$	coherent
first order (coh, $\to$, $\forall$)	coh $+ \forall +$ implications	Heyting
higher order	$\top + \Sigma + Id + \to + Prop$	elementary topos

Замечания

- Пусть T – теория типов из второго столбца. Тогда существуют эквивалентности категорий $T\text{-}\mathbf{Mod} \simeq C \simeq L$, где C – категория категорий из третьего столбца, а L – категория теорий из первого.
- Все теории в первом столбце мультисортные.
- Теории в столбце Logic перечеислены в порядке возрастания числа логчиеских связок в них; каждая последующая строчка включает предыдущую.
- Все теории типов, начиная с третьей строчки, включают аксиому K.
- LCC – это локльно декартово замкнутые категории, то есть такие категории $\mathbf{C}$, что для любого объекта X категория $\mathbf{C}/X$ – декартово замкнута.

Замечания

- reg и coh – это теории, соответствующие строчкам regular и coherent соответственно.
- quotients – это фактор-типы, которые являются частным случаем HITs для множеств.
- implications – это частный случай типа функций, который определен только для утверждений.
- $\to$, Π, $\forall$ и implications включают функциональную экстенсиональность.
- *Prop* включает пропозициональную экстенсиональность.
- Последняя строчка включает все предыдущие, даже те, для которых нет записи в первом столбце.

Интерпретации теорий

- Мы уже видели как проинтерпретировать $\top + \times$ в декартовой категории, а $\top + \times + \to$ в декартово замкнутой категории.
- Мы (почти) увидим как каждую из теорий типов проинтерпретировать в соответствующей категории.
- Для любой логической теории можно определить понятие модели в **Set**. Это обычное понятие модели.
- Но можно определить модели теории и в других категориях, если они удовлетворяют определенным условиям.
- Конкретно, для любой теории из первого столбца можно определить категорию моделей в любой категории, удовлетворяющей соответствующему условию из третьего.

Модели теорий

- Например, мы можем определить категории моноидов, групп, колец, и так далее в любой декартовой категории.
- Так как аксиомы полей используют $\bot$, $\exists$ и $\vee$, то поля можно определить в любой когерентной категории.
- Если отождествить логическую теорию с соответствующей ей категорией C, то модели C в категории D – это просто функторы $C \to D$, которые сохраняют дополнительную структуру из той строчки таблицы, в которой находятся C и D.

План лекции

Логика и теория типов

Интерпретация логических теорий

- Логика первого порядка
- Интерпретация
- Корректность интерпретации

Сигнатуры логики первого порядка

Сигнатура $\Sigma = (\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ логики первого порядка состоит из:

- Множества $\mathcal{S}$, называемого множеством *сортов*.
- Множества $\mathcal{F}$, называемого множеством *функциональных символов*. Каждому функциональному символу $f \in \mathcal{F}$ приписана сигнатура вида $f : s_1 \times \ldots \times s_n \to s$, где $s_1, \ldots s_n, s \in \mathcal{S}$.
- Множества $\mathcal{P}$, называемого множеством *предикатных символов*. Каждому предикатному символу $R \in \mathcal{P}$ приписана сигнатура вида $R : s_1 \times \ldots \times s_n$, где $s_1, \ldots s_n \in \mathcal{S}$.

Термы логики первого порядка

Для каждого сорта $s \in \mathcal{S}$ выбирается счетное множество переменных V_s. Теперь мы можем определить множество $Term_\Sigma(V)_s$ *термов* сорта s индуктивным образом:

- Если $x \in V_s$, то $x \in Term_\Sigma(V)_s$.
- Если $a_i \in Term_\Sigma(V)_{s_i}$ и $(f : s_1 \times \ldots \times s_n \to s) \in \mathcal{F}$, то $f(a_1, \ldots a_n) \in Term_\Sigma(V)_s$.

Конструкцию термов можно доопределить до функтора $Term_\Sigma : \mathbf{Set}^\mathcal{S} \to \mathbf{Set}^\mathcal{S}$. Более того, на этом функторе существует естественная структура монады. Упражнение: определите эту структуру.

Формулы логики первого порядка

Пусть, как и раньше, $V \in \mathbf{Set}^{\mathcal{S}}$. Теперь мы определим множество $Form_\Sigma(V)$ *формул* индуктивным образом:

- Если $a_i \in Term_\Sigma(V)_{s_i}$ и $(R : s_1 \times \ldots \times s_n) \in \mathcal{P}$, то $R(a_1, \ldots a_n) \in Form_\Sigma(V)$. Формулы такого вида называются *атомарными*.
- $\bot, \top \in Form_\Sigma(V)$.
- Если $\varphi \in Form_\Sigma(V)$, то $\neg\varphi \in Form_\Sigma(V)$.
- Если $\varphi, \psi \in Form_\Sigma(V)$, то $\varphi \wedge \psi, \varphi \vee \psi, \varphi \to \psi \in Form_\Sigma(V)$.
- Если $\varphi \in Form_\Sigma(V \cup \{x : s\})$, то $\forall(x : s)\varphi, \exists(x : s)\varphi \in Form_\Sigma(V)$.

Теории логики первого порядка

- *Теория* логики первого порядка состоит из сигнатуры Σ и множества аксиом вида $\varphi \longmapsto \psi$.
- Когда мы рассматриваем логики, более слабые, чем первого порядка, то мы можем ограничить формулы и/или секвенции, которые можно использовать.
- О секвенции $\varphi \longmapsto \psi$ можно думать как о формуле $\forall x_1 \ldots x_n\ (\varphi \to \psi)$.
- Если в логике есть импликация, то секвенции можно заменить одной формулой.
- Если в логике еще есть квантор всеобщности, то можно считать, что эта формула замкнута.
- Таким образом, теории в логике первого порядка обычно определяют как множество замкнутых формул.

Интерпретация сигнатуры

Пусть $\mathbf{C}$ – декартова категория. Тогда интерпретация сигнатуры $(\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ в $\mathbf{C}$ состоит из следующих данных:

- Функция $[\![-]\!] : \mathcal{S} \to Ob(\mathbf{C})$.
- Функция $[\![-]\!]$, сопоставляющая каждому $(\sigma : s_1 \times \ldots \times s_n \to s) \in \mathcal{F}$ морфизм $[\![\sigma]\!] : [\![s_1]\!] \times \ldots \times [\![s_n]\!] \to [\![s]\!]$.
- Функция $[\![-]\!]$, сопоставляющая каждому $(R : s_1 \times \ldots \times s_n) \in \mathcal{P}$ мономорфизм $[\![R]\!] : d_R \to [\![s_1]\!] \times \ldots \times [\![s_n]\!]$.

Интерпретация термов

Пусть **C** – декартова категория и $[\![-]\!]$ – некоторая интерпретация сигнатуры $(\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$. Если t – терм этой сигнатуры сорта s со свободными переменными в $\{x_1 : s_1, \ldots x_n : s_n\}$, то мы можем определить его интерпретацию $[\![t]\!] : [\![s_1]\!] \times \ldots \times [\![s_n]\!] \to [\![s]\!]$ следующим образом:

- $[\![x_i]\!] = \pi_i$.
- $[\![\sigma(t_1, \ldots t_n)]\!] = [\![\sigma]\!] \circ \langle [\![t_1]\!], \ldots [\![t_n]\!] \rangle$.

Модели алгебраических теорий

- Пусть $\mathcal{A}$ – алгебраическая теория, то есть множество аксиом вида $t_1 = t_2$.
- Тогда модель этой теории в декартовой категории $\mathbf{C}$ – это интерпретация сигнатуры теории, такая что для любой аксиомы $t_1 = t_2$ верно $[\![t_1]\!] = [\![t_2]\!]$.

Интерпретация формул в **Set**

- Прежде чем описать интерпретацию формул в произвольной конечно полной категории, вспомним как она описывается в **Set**.
- В **Set** формулы интерпретируются как подмножества.
- Пусть $[\![-]\!]$ сопоставляет каждому $(R : s_1 \times \ldots \times s_n) \in \mathcal{S}$ подмножество множества $[\![s_1]\!] \times \ldots \times [\![s_n]\!]$.
- Пусть $V = x_1 : s_1, \ldots x_k : s_k$ – упорядоченное множество переменных. Тогда функция интерпретации $[\![-]\!]$ сопостовляет каждой формуле из $Form_\Sigma(V)$ подмножество множества $[\![s_1]\!] \times \ldots \times [\![s_k]\!]$.

Интерпретация формул в **Set**

- $[\![\bot]\!]$ – пустое подмножество.
- $[\![\top]\!]$ – всё множество.
- $[\![\neg\varphi]\!]$ – дополнение подмножества $[\![\varphi]\!]$.
- $[\![\varphi \wedge \psi]\!] = [\![\varphi]\!] \cap [\![\psi]\!]$.
- $[\![\varphi \vee \psi]\!] = [\![\varphi]\!] \cup [\![\psi]\!]$.
- Упражнение: опишите интерпретацию импликации, кванторов и равенства.

Истинность формул в **Set**

- Интерпретация замкнутой формулы – это подмножество одноэлементного множества.
- Следовательно, либо одноэлементное множество, либо пустое.
- В первом случае говорят, что эта формула *истинна* в этой интерпретации, во втором, что она *ложна*.

Интерпретация формул в конечно полной категории

- Пусть **C** – конечно полная категория.
- Тогда формулы со свободными переменными в V интерпретируются как подобъекты $[\![V]\!]$.
- Если $[\![t_1]\!], [\![t_2]\!] : [\![s_1]\!] \times \ldots \times [\![s_n]\!] \to [\![s]\!]$, то формула $t_1 = t_2$ интерпретируется как уравнитель $[\![t_1]\!]$ и $[\![t_2]\!]$.
- Формула $\varphi = R(t_1, \ldots t_k)$ интерпретируется как пулбэк $[\![R]\!]$:

$$\begin{tikzcd} d_\varphi \arrow[r] \arrow[d, hook] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & d_R \arrow[d, hook, "{[\![R]\!]}"] \\ {[\![V]\!]} \arrow[r, "{\langle [\![t_1]\!], \ldots [\![t_k]\!] \rangle}"'] & {[\![s_1]\!] \times \ldots \times [\![s_k]\!]} \end{tikzcd}$$

Истинность секвенций

- Мы будем говорить, что секвенция $\varphi \longmapsto \psi$ истина в некоторой интерпретации $[\![-]\!]$, если подобъект $[\![\varphi]\!]$ является подобъектом $[\![\psi]\!]$.
- В частности мы можем говорить, что формула ψ истина, если истина секвенция $\top \longmapsto \psi$; другими словами, если $[\![\psi]\!]$ – максимальный подобъект, то есть изоморфизм.
- Модель некоторой теории логики первого порядка – это интерпретация, такая что все аксиомы в ней истины.

Интерпретация $\top$ и $\wedge$

- $\top$ интерпретируется как максимальный объект.
- Наибольший подобъект объекта X – это id_X.
- $\varphi \wedge \psi$ интерпретируется как пересечение подобъектов $[\![\varphi]\!]$ и $[\![\psi]\!]$.

Корректность $\top$

- Разумеется мы хотим, чтобы интерпретация уважала правила вывода.
- Правило вывода для $\top$:

$$\varphi \longmapsto \top$$

- Чтобы доказать, что эта аксиома всегда корректна, нужно проверить, что для любой подобъект $d_\varphi \hookrightarrow V$ является подобъектом $[\![\top]\!] = id_V : V \hookrightarrow V$, что очевидно.

Корректность $\wedge$

- Правила вывода для $\wedge$:

$$\frac{\varphi \longmapsto \psi \qquad \varphi \longmapsto \chi}{\varphi \longmapsto \psi \wedge \chi}$$

$$\frac{\varphi \longmapsto \psi \wedge \chi}{\varphi \longmapsto \psi} \qquad \frac{\varphi \longmapsto \psi \wedge \chi}{\varphi \longmapsto \chi}$$

- Эти правила уважаются, так как по определению пулбэков стрелка $[\![\varphi]\!] \to [\![\psi]\!] \cap [\![\chi]\!]$ существует тогда и только тогда, когда существуют стрелки $[\![\varphi]\!] \to [\![\psi]\!]$ и $[\![\varphi]\!] \to [\![\chi]\!]$.

Интерпретация $\exists$

- Теории, в которых формулы состоят только из равенств, конъюнкций, $\top$ и $\exists$ называются *регулярными*.
- Мы не можем проинтерпретировать $\exists$ в произвольной конечно полной категории.
- Категории, где можно это сделать, называются *регулярными*.
- Формальное определение будет дано ниже.

Интерпретация $\exists$ в **Set**

- Пусть $[\![\varphi(x, x_1, \ldots x_n)]\!] : d_\varphi \hookrightarrow [\![s]\!] \times [\![s_1]\!] \times \ldots \times [\![s_n]\!]$.
- Как проинтерпретировать $\exists(x : s)(\varphi(x, x_1 \ldots x_n))$?
- Если рассмотреть $\pi_{1,\ldots n} \circ [\![\varphi]\!] : d_\varphi \to [\![s_1]\!] \times \ldots \times [\![s_n]\!]$, то это почти дает нам интерпретацию $\exists(x : s)(\varphi(x, x_1, \ldots x_n))$, так как прообраз некоторого элемента $(a_1, \ldots a_n)$ населен тогда и только тогда, когда существует $a \in [\![s]\!]$, такой что $(a, a_1, \ldots a_n) \in [\![\varphi]\!]$.
- Единственная проблема заключается в том, что $\pi_{1,\ldots n} \circ [\![\varphi]\!]$ не является мономорфизмом.
- Мы можем решить эту проблему, определив интерпретацию $\exists(x : s)(\varphi(x, x_1, \ldots x_n))$ как образ $\pi_{1,\ldots n} \circ [\![\varphi]\!]$.

Образ морфизма

- Мы можем обобщить понятие образа функции на произвольную категорию.
- *Образ* морфизма $f : A \to B$ – это наименьший мономорфизм $im\, f \hookrightarrow B$, через который f факторизуется.
- Другими словами, существует стрелка $A \to im\, f$, такая что для любых стрелок $g : A \to C$ и $h : C \hookrightarrow B$ если $h \circ g = f$, то $im\, f$ является подобъектом C:

$$
\begin{tikzcd}
 & im\, f \arrow[dr] \arrow[dd, dashed] & \\
A \arrow[ur] \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & B \\
 & C \arrow[ur, "h"'] &
\end{tikzcd}
$$

Интерпретация существования

- В произвольной категории образ может не существовать, но он уникален, если существует.
- Если предположить, что в категории существуют образы, то можно попробовать проинтерпретировать существование так же как и в **Set**.
- Если $[\![\varphi(x, x_1, \ldots x_n)]\!] : d_\varphi \hookrightarrow [\![s]\!] \times [\![s_1]\!] \times \ldots \times [\![s_n]\!]$, то мы определяем $[\![\exists (x : s)\varphi]\!]$ как образ $\pi_{1,\ldots,n} \circ [\![\varphi]\!]$.

Интерпретация подстановки

- Так как правила вывода для существования используют подстановку, нам нужно знать как она интерпретируется, чтобы проверить эти правила.
- Утверждене: если φ – формула со свободными переменными в $\{x_1 : s_1, \ldots x_n : s_n\}$ и $t_1, \ldots t_n$ – термы сортов $s_1, \ldots s_n$, то $[\![\varphi[x_1 := t_1, \ldots x_n := t_n]]\!]$ является пулбэком d_φ:

$$\begin{tikzcd}
d_{\varphi[x_1:=t_1,\ldots x_n:=t_n]} \arrow[r] \arrow[d, "{[\![\varphi[x_1:=t_1,\ldots x_n:=t_n]]\!]}"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & d_\varphi \arrow[d, "{[\![\varphi]\!]}"] \\
V \arrow[r, "{\langle t_1,\ldots t_n \rangle}"'] & {[\![s_1]\!] \times \ldots \times [\![s_n]\!]}
\end{tikzcd}$$

Интерпретация подстановки

- Доказывать это утверждение мы будем индукцией по φ.
- Для $\top$ это очевидно, так как пулбэк тождественного морфизма – тождественный морфизм.
- Проверим для равенства. Пусть $[\![t]\!], [\![t']\!] : [\![s_1]\!] \times \ldots \times [\![s_n]\!] \to [\![s']\!]$ и $[\![t_i]\!] : V \to [\![s_i]\!]$. Тогда нужно показать, что морфизм $E \to V$ в диаргамме ниже является уровнителем $[\![t]\!] \circ \langle [\![t_1]\!], \ldots [\![t_n]\!] \rangle$ и $[\![t']\!] \circ \langle [\![t_1]\!], \ldots [\![t_n]\!] \rangle$, что легко сделать, используя универсальное свойство пулбэков.

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[rr] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, very near start, "\lrcorner"] & & d_{t=t'} \arrow[d, "{[\![t=t']\!]}"] & \\
V \arrow[r, "{\langle [\![t_1]\!], \ldots [\![t_n]\!] \rangle}"'] & {[\![s_1]\!] \times \ldots \times [\![s_n]\!]} \arrow[r, phantom] & {} & {}
\end{tikzcd}$$

$$V \xrightarrow[\langle [\![t_1]\!], \ldots [\![t_n]\!] \rangle]{} [\![s_1]\!] \times \ldots \times [\![s_n]\!] \overset{[\![t]\!]}{\underset{[\![t']\!]}{\rightrightarrows}} [\![s']\!]$$

Интерпретация подстановки в $\exists$

- Даже если в категории существуют образы всех морфизмов, они могут не коммутировать с пулбэками.
- Категория называется *регулярной*, если у всех морфизмов существуют образы, и они стабильны относительно пулбэков.
- Таким образом, в любой регулярной категории подстановка действительно интерпретируется как пулбэк.

Корректность интерпретации $\exists$

- Правила вывода для $\exists$:

$$\frac{\exists(x : s)\varphi \longmapsto \psi}{\varphi \longmapsto \psi} \qquad \frac{\varphi \longmapsto \psi}{\exists(x : s)\varphi \longmapsto \psi}$$

- Обратите внимание, что ψ определен в контексте $x_1, \ldots x_n$, но используется также и в контексте $x_1, \ldots x_n, x$. По лемме об интерпретации подстановки ψ во втором контексте интерпретируется как пулбэк.
- Используя этот факт, легко показать, что данные правила корректны.