

## Подготовка к КР 2

*Список тем:* формула Тейлора, вычисление пределов с помощью формулы Тейлора, формула Тейлора функции, заданной уравнением. Теоремы о среднем (Ролля, Лагранжа, Коши). Задачи на локальные и глобальные минимумы и максимумы, на поиск инфимумов и супремумов функций. Неравенства.

1. Найдите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \ln(x + \sqrt{1 + x^2})}{x^5}.$$

2. Докажите неравенство:

$$\frac{x + a}{2^{(n-1)/n}} \leq \sqrt[n]{x^n + a^n} \leq x + a, \quad x > 0, a > 0, n > 1$$

3. Пусть непрерывная функция  $f$  удовлетворяет уравнению  $\sin(f(x)) + \operatorname{sh}^2(f(x)) = x$  в некоторой окрестности нуля и равенству  $f(0) = 0$ . Найдите разложение функции  $f$  в ряд Тейлора в точке 0 с точностью до  $o(x^4)$ .

4. Функция  $f$  дифференцируема на отрезке  $[1, 2]$ . Докажите, что найдется число  $t \in (1, 2)$ , такое что  $f(2) - f(1) = \frac{t^2}{2} f'(t)$ .

5. Найдите супремум и инфимум функции  $f(x) = e^{-x^2} \cos(x^2)$  на  $\mathbb{R}$ .

6. Докажите неравенство

$$\frac{x \ln(x) + y \ln(y)}{x + y} > \ln\left(\frac{x + y}{2}\right), \quad x, y > 0$$

7. Докажите неравенство

$$\frac{\sin a}{a} \cdot \frac{\sin b}{b} \cdot \frac{\sin c}{c} \leq \left( \frac{\sin\left(\frac{a+b+c}{3}\right)}{\frac{a+b+c}{3}} \right)^3 \quad \text{при } a, b, c \in (0, \pi).$$