1. Докажите, что в любой момент на экваторе есть две диаметрально противоположные точки с одинаковой температурой.

2. Для функции $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и числа $c > 0$ определим множество $A_f(c)$ как множество таких точек x, в любой окрестности которой найдутся y, z такие, что $|f(y) - f(z)| \geq c$.

а) Докажите, что множество точек разрыва функции f есть $\cup_{c>0} A_f(c)$.

б) Докажите, что каждое множество A_f замкнуто.

в) Докажите, что множество точек разрыв функции f не может совпадать с множеством иррациональных чисел.

3. Пусть функция $f(x)$ в окрестности точки 0 имеет непрерывные производные f', f'', ..., $f^(k)$, и они не все обнуляются в 0.

а) Докажите, что если $f(0) = 0$ и x, y — эквивалентные бесконечно малые величины (частное стремится к 1), то величины $f(x)$ и $f(y)$ тоже эквивалентны.

б) Верно ли утверждение пункта а), если f бесконечно дифференцируема, но все производные в 0 равны 0?

в) Докажите, что если $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, а величины x и y бесконечно малые, то величины $f(x) - f(y)$ и $x - y$ эквивалентны.

г) Найдите предел

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin \operatorname{tg} x - \operatorname{tg} \sin x}{\arcsin \operatorname{arctg} x - \operatorname{arctg} \arcsin x}.$$

4. Пусть $a > 1$ и функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|^a$ при всех x, y. Докажите, что функция f постоянна.

5. Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[1, 2]$ и дифференцируема на интервале $(1, 2)$, то $f(2) - f(1) = c^2 f(c)/2$ для некоторой точки $c \in (1, 2)$.