# Задания

23 марта 2018 г.

1. При каких условиях в категории (пред)порядка существует булевский объект?

2. Давайте докажем, что категории моноидов, групп и абелевых групп не являются декартово замкнутыми.

   (a) Докажите, что если в декартово замкнутой категории есть начальный объект, то он строгий.

   (b) Объект называется *нулевым*, если он одновременно начальный и терминальный. Докажите, что если в категории есть нулевой объект и начальный объект строгий, то эта категория тривиальна (то есть в ней между любой парой объектов существует уникальная стрелка).

   (c) Докажите, что в категориях, упомянутых в задании, есть нулевой объект и сделайте вывод, что они не декартово замкнуты.

3. Пусть в категории $\mathbf{C}$ есть все конечные произведения и булевский объект. Сконструируйте в $\mathbf{C}$ морфизмы $\mathrm{and}, \mathrm{or} : \mathrm{Bool} \times \mathrm{Bool} \to \mathrm{Bool}$, такие что следующие диаграммы коммутируют

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "\langle \mathrm{true}, \mathrm{true} \rangle"'] \arrow[dr, "\mathrm{true}"] & \\ \mathrm{Bool} \times \mathrm{Bool} \arrow[r, "\mathrm{and}"'] & \mathrm{Bool} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "\langle \mathrm{true}, \mathrm{true} \rangle"'] \arrow[dr, "\mathrm{true}"] & \\ \mathrm{Bool} \times \mathrm{Bool} \arrow[r, "\mathrm{or}"'] & \mathrm{Bool} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "\langle \mathrm{true}, \mathrm{false} \rangle"'] \arrow[dr, "\mathrm{false}"] & \\ \mathrm{Bool} \times \mathrm{Bool} \arrow[r, "\mathrm{and}"'] & \mathrm{Bool} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "\langle \mathrm{true}, \mathrm{false} \rangle"'] \arrow[dr, "\mathrm{true}"] & \\ \mathrm{Bool} \times \mathrm{Bool} \arrow[r, "\mathrm{or}"'] & \mathrm{Bool} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "\langle \mathrm{false}, \mathrm{true} \rangle"'] \arrow[dr, "\mathrm{false}"] & \\ \mathrm{Bool} \times \mathrm{Bool} \arrow[r, "\mathrm{and}"'] & \mathrm{Bool} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} 1 \arrow[d, "\langle \mathrm{false}, \mathrm{true} \rangle"'] \arrow[dr, "\mathrm{true}"] & \\ \mathrm{Bool} \times \mathrm{Bool} \arrow[r, "\mathrm{or}"'] & \mathrm{Bool} \end{tikzcd}$$

$$
\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, swap, "\langle \mathrm{false},\mathrm{false}\rangle"] \arrow[dr, "\mathrm{false}"] & \\
\mathrm{Bool}\times\mathrm{Bool} \arrow[r, swap, "\mathrm{and}"] & \mathrm{Bool}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
1 \arrow[d, swap, "\langle \mathrm{false},\mathrm{false}\rangle"] \arrow[dr, "\mathrm{false}"] & \\
\mathrm{Bool}\times\mathrm{Bool} \arrow[r, swap, "\mathrm{or}"] & \mathrm{Bool}
\end{tikzcd}
$$

4. Мы видели, что объекты 2 и 1 могут быть изоморфны. Если 2 является булевским объектом, то это все равно может произойти, но эту ситуацию легко отследить.

   Пусть **C** – категория с конечными произведениями. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

   (a) **C** – категория предпорядка.

   (b) В **C** терминальный объект является булевским.

   (c) В **C** существует булевский объект, такой что $\mathrm{true} = \mathrm{false}$.

5. Докажите, что в любой декартово замкнутой категории **C** выполнены следующие утверждения:

   (a) Для любого объекта $A$ существует изоморфизм $A^1 \simeq A$.

   (b) Для любых объектов $A$, $B$ и $C$ существует изоморфизм $A^{B\times C} \simeq (A^B)^C$.

   (c) Умножение дистрибутивно над сложением, то есть для любых объектов $A$, $B$ и $C$ морфизм

   $$[\langle \pi_1, \mathrm{inj}_1 \circ \pi_2\rangle, \langle \pi_1, \mathrm{inj}_2 \circ \pi_2\rangle] : (A \times B) \amalg (A \times C) \to A \times (B \amalg C)$$

   является изоморфизмом, где $\mathrm{inj}_1 : B \to B \amalg C$ и $\mathrm{inj}_2 : C \to B \amalg C$ – канонические морфизмы копроизведения, и если $f : B \to X$, $g : C \to X$, то $[f, g] : B \amalg C \to X$ – уникальный морфизм, удовлетворяющий $[f, g] \circ \mathrm{inj}_1 = f$ и $[f, g] \circ \mathrm{inj}_2$.

6. Докажите, что в декартово замкнутой категории объект 2 всегда является булевским.

7. Определите в произвольной декартово замкнутой категории комбинаторы $K$ и $S$, то есть следующие морфизмы:

   $$K : A \to A^B$$
   $$S : (C^B)^A \to (C^A)^{(B^A)}$$

8. Одна из аксиом арифметики Пеано говорит, что функция suc должна быть инъективной. Докажите, что в любой декартово замкнутой категории с объектом натуральных чисел морфизм suc является расщепленным мономорфизмом.

9. Одна из аксиом арифметики Пеано говорит, что ни для какого $x$ не верно, что $\mathrm{zero} = \mathrm{suc}(x)$. В произвольной декартово замкнутой категории это может быть верно, но только если она является категорией предпорядка. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны.

   (a) $\mathbf{C}$ – категория предпорядка.

   (b) В $\mathbf{C}$ терминальный объект является объектом натуральных чисел.

   (c) В $\mathbf{C}$ существует объект натуральных чисел, такой что для любого $x : 1 \to \mathbb{N}$ верно, что $\mathrm{zero} = \mathrm{suc} \circ x$.

   (d) В $\mathbf{C}$ существует объект натуральных чисел, такой что для некоторого $x : 1 \to \mathbb{N}$ верно, что $\mathrm{zero} = \mathrm{suc} \circ x$.

10. Определите в произвольной декартово замкнутой категории с объектом натуральных чисел морфизм сложения $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, удовлетворяющий следующим условиям:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[d, "\langle \mathrm{zero} \circ !_{\mathbb{N}}, id_{\mathbb{N}} \rangle"'] \arrow[dr, "id_{\mathbb{N}}"] & \\
\mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "+"'] & \mathbb{N}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "+"] \arrow[d, "\mathrm{suc} \times id_{\mathbb{N}}"'] & \mathbb{N} \arrow[d, "\mathrm{suc}"] \\
\mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "+"'] & \mathbb{N}
\end{tikzcd}$$

Докажите, что сложение коммутативно и ассоциативно, то есть, что коммутируют следующие диаграммы:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "\langle \pi_2, \pi_1 \rangle"] \arrow[dr, "+"'] & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[d, "+"] \\
& \mathbb{N} \times \mathbb{N}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N} \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "+ \times id_{\mathbb{N}}"'] & \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \arrow[r, "id_{\mathbb{N}} \times +"] & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[d, "+"] \\
\mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[rr, "+"'] & & \mathbb{N}
\end{tikzcd}$$

11. Докажите, что если мы добавим в лямбда исчисление тип натуральных чисел $\mathbb{N}$ с термами и аксиомами, приведенными ниже, то такое лямбда исчесление можно проинтерпретировать в любой декартово замкнутой категории с объектом натуральных чисел.

$$\frac{}{\Gamma \vdash \mathrm{zero} : \mathbb{N}} \qquad \frac{\Gamma \vdash n : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash \mathrm{suc}(n) : \mathbb{N}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash z : D \qquad \Gamma, x : \mathbb{N}, r : D \vdash s : D \qquad \Gamma \vdash n : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash \mathrm{rec}(z, s, n) : D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash z : D \qquad \Gamma, x : \mathbb{N}, r : D \vdash s : D}{\Gamma \vdash \mathrm{rec}(z, s, \mathrm{zero}) \equiv z : D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash z : D \qquad \Gamma, x : \mathbb{N}, r : D \vdash s : D \qquad \Gamma \vdash n : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash \mathrm{rec}(z, s, \mathrm{suc}(n)) \equiv s[x := n, r := \mathrm{rec}(z, s, n)] : D}$$

В качестве примера к предпоследней задаче давайте сконструируем морфизм умножения. Это морфизм $*$, удовлетворяющий следующим свойствам:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \arrow[r, "!_{\mathbb{N}}"] \arrow[d, "\langle \mathrm{zero} \circ !_{\mathbb{N}}, id_{\mathbb{N}} \rangle"'] & 1 \arrow[d, "\mathrm{zero}"] \\
\mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "*"'] & \mathbb{N}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[r, "id_{\mathbb{N}} \times \langle id_{\mathbb{N}}, id_{\mathbb{N}} \rangle"] \arrow[d, "\mathrm{suc} \times id_{\mathbb{N}}"] & \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \arrow[r, "\simeq"] & (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N} \arrow[r, "* \times id_{\mathbb{N}}"] & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[d, "+"] \\
\mathbb{N} \times \mathbb{N} \arrow[rrr, "*"'] & & & \mathbb{N}
\end{tikzcd}$$

Чтобы его сконструировать возьмем в определении натуральных чисел $X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. В качестве $z : 1 \to X$ возьмем морфизм, по каррированию соответствующий функции $\mathbb{N} \to 1 \xrightarrow{\mathrm{zero}} \mathbb{N}$. В качестве $s : X \to X$ возьмем морфизм, по каррированию соответствующий следующей функции:

$$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \xrightarrow{id_{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \times \langle id_{\mathbb{N}}, id_{\mathbb{N}} \rangle} \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \simeq (\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N} \xrightarrow{\mathrm{ev} \times id_{\mathbb{N}}} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{+} \mathbb{N}.$$

Тогда коммутирование двух частей диаграммы в определение $\mathbb{N}$ эквивалентно коммутированию двух диаграмм в определении $*$.