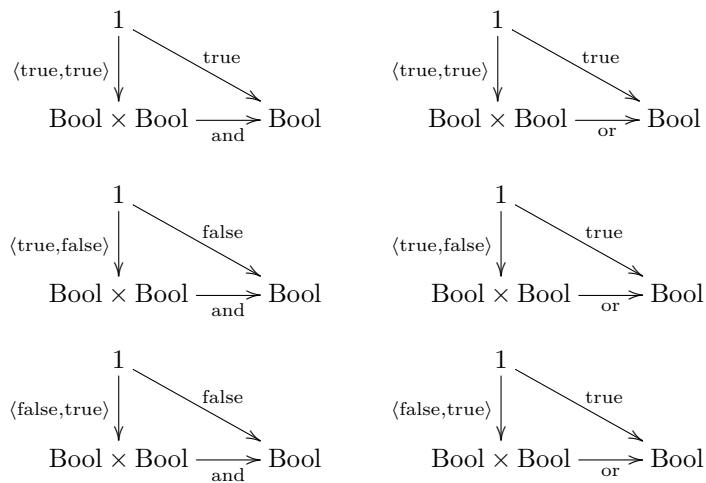
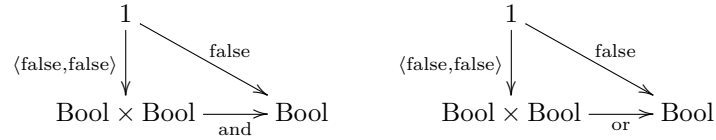


# Задания

23 марта 2018 г.

1. При каких условиях в категории (пред)порядка существует булевский объект?
2. Давайте докажем, что категории моноидов, групп и абелевых групп не являются декартово замкнутыми.
  - (a) Докажите, что если в декартово замкнутой категории есть начальный объект, то он строгий.
  - (b) Объект называется *нулевым*, если он одновременно начальный и терминальный. Докажите, что если в категории есть нулевой объект и начальный объект строгий, то эта категория тривиальна (то есть в ней между любой парой объектов существует уникальная стрелка).
  - (c) Докажите, что в категориях, упомянутых в задании, есть нулевой объект и сделайте вывод, что они не декартово замкнуты.
3. Пусть в категории  $\mathbf{C}$  есть все конечные произведения и булевский объект. Сконструируйте в  $\mathbf{C}$  морфизмы  $\text{and}, \text{or} : \text{Bool} \times \text{Bool} \rightarrow \text{Bool}$ , такие что следующие диаграммы коммутируют





4. Мы видели, что объекты 2 и 1 могут быть изоморфны. Если 2 является булевым объектом, то это все равно может произойти, но эту ситуацию легко отследить.

Пусть  $\mathbf{C}$  – категория с конечными произведениями. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

- (a)  $\mathbf{C}$  – категория предпорядка.
  - (b) В  $\mathbf{C}$  терминальный объект является булевым.
  - (c) В  $\mathbf{C}$  существует булевский объект, такой что  $\text{true} = \text{false}$ .
5. Докажите, что в любой декартово замкнутой категории  $\mathbf{C}$  выполнены следующие утверждения:
- (a) Для любого объекта  $A$  существует изоморфизм  $A^1 \simeq A$ .
  - (b) Для любых объектов  $A, B$  и  $C$  существует изоморфизм  $A^{B \times C} \simeq (A^B)^C$ .
  - (c) Умножение дистрибутивно над сложением, то есть для любых объектов  $A, B$  и  $C$  морфизм

$$[\langle \pi_1, \text{inj}_1 \circ \pi_2 \rangle, \langle \pi_1, \text{inj}_2 \circ \pi_2 \rangle] : (A \times B) \amalg (A \times C) \rightarrow A \times (B \amalg C)$$

является изоморфизмом, где  $\text{inj}_1 : B \rightarrow B \amalg C$  и  $\text{inj}_2 : C \rightarrow B \amalg C$  – канонические морфизмы копроизведения, и если  $f : B \rightarrow X$ ,  $g : C \rightarrow X$ , то  $[f, g] : B \amalg C \rightarrow X$  – уникальный морфизм, удовлетворяющий  $[f, g] \circ \text{inj}_1 = f$  и  $[f, g] \circ \text{inj}_2$ .

6. Докажите, что в декартово замкнутой категории объект 2 всегда является булевым.
7. Определите в произвольной декартово замкнутой категории комбинаторы  $K$  и  $S$ , то есть следующие морфизмы:

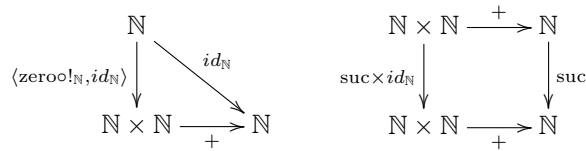
$$\begin{aligned}
 K &: A \rightarrow A^B \\
 S &: (C^B)^A \rightarrow (C^A)^{(B^A)}
 \end{aligned}$$

8. Одна из аксиом арифметики Пеано говорит, что функция  $\text{succ}$  должна быть инъективной. Докажите, что в любой декартово замкнутой категории с объектом натуральных чисел морфизм  $\text{succ}$  является расщепленным мономорфизмом.

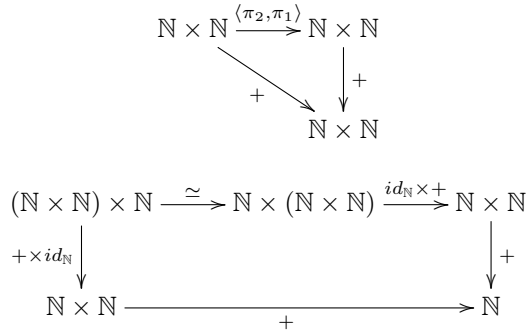
9. Одна из аксиом арифметики Пеано говорит, что ни для какого  $x$  не верно, что  $\text{zero} = \text{suc}(x)$ . В произвольной декартово замкнутой категории это может быть верно, но только если она является категорией предпорядка. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны.

- (a)  $\mathbf{C}$  – категория предпорядка.
- (b) В  $\mathbf{C}$  терминальный объект является объектом натуральных чисел.
- (c) В  $\mathbf{C}$  существует объект натуральных чисел, такой что для любого  $x : 1 \rightarrow \mathbb{N}$  верно, что  $\text{zero} = \text{suc} \circ x$ .
- (d) В  $\mathbf{C}$  существует объект натуральных чисел, такой что для некоторого  $x : 1 \rightarrow \mathbb{N}$  верно, что  $\text{zero} = \text{suc} \circ x$ .

10. Определите в произвольной декартово замкнутой категории с объектом натуральных чисел морфизм сложения  $+$  :  $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , удовлетворяющий следующим условиям:



Докажите, что сложение коммутативно и ассоциативно, то есть, что коммутируют следующие диаграммы:



11. Докажите, что если мы добавим в лямбда исчисление тип натуральных чисел  $\mathbb{N}$  с термами и аксиомами, приведенными ниже, то такое лямбда исчисление можно проинтерпретировать в любой декартово замкнутой категории с объектом натуральных чисел.

$$\frac{}{\Gamma \vdash \text{zero} : \mathbb{N}} \quad \frac{}{\Gamma \vdash n : \mathbb{N}}$$

$$\frac{\Gamma \vdash z : D \quad \Gamma, x : \mathbb{N}, r : D \vdash s : D \quad \Gamma \vdash n : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash \text{rec}(z, s, n) : D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash z : D \quad \Gamma, x : \mathbb{N}, r : D \vdash s : D}{\Gamma \vdash \text{rec}(z, s, \text{zero}) \equiv z : D}$$

$$\frac{\Gamma \vdash z : D \quad \Gamma, x : \mathbb{N}, r : D \vdash s : D \quad \Gamma \vdash n : \mathbb{N}}{\Gamma \vdash \text{rec}(z, s, \text{suc}(n)) \equiv s[x := n, r := \text{rec}(z, s, n)] : D}$$

В качестве примера к предпоследней задаче давайте сконструируем морфизм умножения. Это морфизм  $*$ , удовлетворяющий следующим свойствам:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{!_{\mathbb{N}}} & 1 \\ \langle \text{zero} \circ !_{\mathbb{N}}, \text{id}_{\mathbb{N}} \rangle \downarrow & & \downarrow \text{zero} \\ \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \xrightarrow{*} & \mathbb{N} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \xrightarrow{\text{id}_{\mathbb{N}} \times \langle \text{id}_{\mathbb{N}}, \text{id}_{\mathbb{N}} \rangle} & \mathbb{N} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) & \xrightarrow{\simeq} & (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N} \xrightarrow{* \times \text{id}_{\mathbb{N}}} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ \downarrow \text{suc} \times \text{id}_{\mathbb{N}} & & & & \downarrow + \\ \mathbb{N} \times \mathbb{N} & \xrightarrow{\hspace{10em}} & & & \mathbb{N} \end{array}$$

Чтобы его сконструировать возьмем в определении натуральных чисел  $X = \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ . В качестве  $z : 1 \rightarrow X$  возьмем морфизм, по каррированию соответствующий функции  $\mathbb{N} \rightarrow 1 \xrightarrow{\text{zero}} \mathbb{N}$ . В качестве  $s : X \rightarrow X$  возьмем морфизм, по каррированию соответствующий следующей функции:

$$\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N} \xrightarrow{\text{id}_{\mathbb{N}^{\mathbb{N}}} \times \langle \text{id}_{\mathbb{N}}, \text{id}_{\mathbb{N}} \rangle} \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \simeq (\mathbb{N}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{N}) \times \mathbb{N} \xrightarrow{\text{ev} \times \text{id}_{\mathbb{N}}} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \xrightarrow{+} \mathbb{N}.$$

Тогда коммутирование двух частей диаграммы в определении  $\mathbb{N}$  эквивалентно коммутированию двух диаграмм в определении  $*$ .