ML 37. Докажите, что:

а) множество $\mathbb{Q}$ со стандартным порядком изоморфно множеству $\mathbb{Q}_+$ (множество положительных рациональных чисел) со стандартным порядком (т. е. существует биекция, которая сохраняет порядок);

б) счетное множество $\mathbb{M}$, на котором задан плотный порядок (т.е. между любыми двумя элементами есть еще один элемент) и в котором нет минимального и максимального элемента, изоморфно множеству $\mathbb{Q}$ со стандартным порядком;

в) любая замкнутая формула логики первого порядка истинна в интерпретации $(\mathbb{M}, <)$ (где $\mathbb{M}$ — счетное множество без минимального и максимального элемента, а порядок $<$ плотный) тогда и только тогда, когда она истинна в интерпретации $(\mathbb{Q}, <)$.

Определение 1. Две интерпретации одной сигнатуры называются элементарно эквивалентными, если каждая замкнутая формула в первой интерпретации верна тогда и только тогда, когда она верна во второй.

ML 38. Будет ли интерпретация $(\mathbb{N}, =, <)$ элементарно эквивалентна: $(\mathbb{N}+\mathbb{N}, =, <)$. (Две копии нат. чисел, все элементы из второй копии больше элементов из первой).

ML 39. Можно ли в данной интерпретации провести элиминацию кванторов $(M, =)$, где M — призвольное бесконечное множество? Если нет, то можно ли добавить какой-нибудь выразимый предикат так, чтобы с новым предикатом элиминация квантором стала возможной.

ML 40. Можно ли в данной интерпретации провести элиминацию кванторов $(\mathbb{Q}, =, +)$? Если нет, то можно ли добавить какой-нибудь выразимый предикат так, чтобы с новым предикатом элиминация квантором стала возможной.

ML 41. Можно ли в данной интерпретации провести элиминацию кванторов $(\mathbb{Q}, =, S)$, где S — прибавление единицы? Если нет, то можно ли добавить какой-нибудь выразимый предикат так, чтобы с новым предикатом элиминация кванторов стала возможной.

ML 42. Пусть T — замкнутая формула в некоторой сигнатуре, и пусть существует интерпретация со сколь угодно большим носителем, в которой данная формула истинна. Докажите, что существует интерпретация с бесконечным носителем, в которой данная формула истинна.

ML 22. Задача Поста состоит в следующем: есть доминошки n видов $\left[\frac{s_1}{t_1}\right], \ldots, \left[\frac{s_n}{t_n}\right]$, s_i и t_i — конечные строки, есть неограниченный запас доминошек каждого вида, доминошки переворачивать нельзя. Требуется определить, можно ли составить несколько доминошек так, чтобы в верхней и нижней их половине читалась одна и та же строка, такие последовательности доминошек будем называть согласованными. Докажите, что задача Поста алгоритмически неразрешима.

ML 34. Докажите общезначимость следующих формул при помощи алгоритма рассказаного на лекции (перейти к отрицанию, привести к предваренной форме применить сколемизацию и воспользоваться теоремой Эрбрана):

а) $\forall x\ P(x) \to \exists x\ P(x)$;

б) $\forall x \forall y\ P(x, y) \to \forall y\ \exists x\ P(x, y)$;

в) $(\exists x\ (P(x) \to Q(x))) \to (\forall x\ P(x) \to \exists x\ Q(x))$;

г) $(\forall x\ P(x) \to \exists x\ Q(x)) \to (\exists x\ (P(x) \to Q(x)))$;

д) $\exists x\ (A(c, x) \to A(x, d))$.

ML 35. Докажите корректность секвенциального исчисления.

ML 36. Покажите, что следующие формулы выводимы в исчислении секвенций (формула φ выводима, если выводима $\vdash \varphi$):

а) $\forall x\ P(x) \to \exists x\ P(x)$;

б) $\forall x \forall y\ P(x, y) \to \forall y\ \exists x\ P(x, y)$;

в) $(\exists x\ (P(x) \to Q(x))) \to (\forall x\ P(x) \to \exists x\ Q(x))$;

г) $(\forall x\ P(x) \to \exists x\ Q(x)) \to (\exists x\ (P(x) \to Q(x)))$;

д) $\exists x\ (A(c, x) \to A(x, d))$.