Домашнее задание №9

Группа 504

Количество баллов на зачёт: **8,5**.

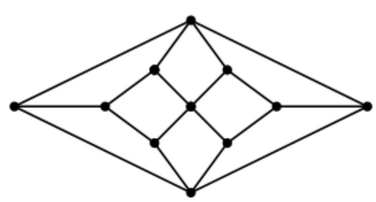
1. (0,5) Выразить количество остовных деревьев односвязного графа G через количество остовных деревьев в каждом из k блоков $B_1, \dots, B_k$ графа G.

2. (1) Доказать, что вершинно односвязный граф G является реберно k-связным тогда и только тогда, когда любой блок B_i такого графа реберно k-связный.

3. (1,5) Граф называется кактусом, если каждый его блок представляет собой либо одиночное ребро, либо единственный цикл. В частности, любое дерево является кактусом. Предъявить кактусы, построенные на $2k+1$ и $2k$ вершинах соответственно и имеющие максимальное количество ребер. Доказать, что кактусы с большим количеством ребер при фиксированном k построить невозможно.

4. (1) Описать разложение на ручки для графа Петерсена.

5. (1,5) Чему равно минимальное количество ручек в разложении графа, показанного на рисунке? Начальный цикл в разложении ручкой не считается.



6. (1) Доказать, что простой граф G, построенный на трёх или более вершинах, двусвязен тогда и только тогда, когда для любой тройки различных вершин (x, y, z) в G есть простой путь из x в z, проходящий через y.

7. (0,5) Пусть G есть вершинно двусвязный граф, и пусть вершины x и y этого графа соединены в G путем P. Доказать или опровергнуть следующее утверждение: в графе G найдется путь Q, соединяющий x и y и не пересекающийся с P ни в каких внутренних вершинах этого пути.

8. (1) Пусть D есть орграф, построенный на множестве вершин $[12] = \{1, 2, \dots, 12\}$, в котором из i в j проведено ребро тогда и только тогда, когда i делит j. Определить $\kappa(1, 12)$ и $\lambda(1, 12)$ в таком графе.

9. (1) Пусть G вершинно k-связен. Образуем из G новый граф G' путём добавления к G новой вершины y и не менее k рёбер из y в k различных вершин графа G. Доказать, что G' также k-связен.

   Лемма. *Назовем k-веером из вершины x в множество Y набор из k путей, начинающихся в x, заканчивающихся в Y, и не имеющих никаких общих вершин, кроме вершины x. Пусть G есть k-связный граф, x — некоторая его вершина, а Y — набор из не менее чем k вершин графа G, не включающий x. Доказать, что тогда существует k-веер из x в Y.*

Доказательство. Добавим в граф G вершину y и соединим её со всеми вершинами множества Y, образозовав тем самым граф G'. Пользуясь результатом предыдущего упражнения, заключаем, что G' k-связен. По теореме Менгера в G' есть k непересекающихся путей из x в y. Удалив для каждого из этих путей замыкающую вершину y вместе с инцидентным ей ребром, мы получим в графе G k-веер из x в Y. □

10. (1,5) Доказать, что в k-связном графе для любых k вершин найдется цикл C, на котором лежат все эти k вершин.

11. (1,5) Показать, что в условиях предыдущего упражнения мы не можем заранее задать порядок, в котором должны проходиться вершины, лежащие на общем для них цикле C.

12. (2) Построить минимально возможный 3-связный граф G, в котором имеется пара несмежных вершин, соединенных между собой четырьмя попарно непересекающимися по внутренним вершинам путями.