

Домашнее задание 7. Основные понятия теории графов. Деревья.

Группа 102/3

Количество баллов на зачёт: 8

1. (1 балл) Пусть G есть простой граф, степень любой вершины которого больше или равна δ . Доказать, что в графе G существует простой путь длины, большей или равной δ . Для любого $k \geq 2$ предъявить простой граф G с $\delta = k$, который не содержит простых путей, длина которых больше чем k .
2. (2 балла) Пусть G есть простой граф без треугольников, то есть граф, не содержащий K_3 в качестве своего индуцированного цикла. Показать, что максимальное количество ребер в таком графе не превосходит $n^2/4$.
3. (1 балл) Пусть в простом графе G с диаметром 2 имеется точка сочленения. Доказать, что в графе \bar{G} найдется изолированная вершина
4. (2 балла) Доказать, что любой 3-регулярный граф G имеет точку сочленения тогда и только тогда, когда в нем содержится мост.
5. (1 балл) Пусть в дереве T имеется четное количество ребер. Доказать, что в таком дереве обязательно найдется хотя бы одна вершина четной степени.
6. (1,5 балла) Полным m -арным деревом называется корневое дерево, у которого любая вершина, отличная от листа, имеет ровно m сыновей. Предположим, что у такого дерева имеется k вершин, отличных от листа. Доказать, что в таком дереве имеется $(m - 1)k + 1$ лист.
7. (1 балл) Графовая последовательность дерева T имеет вид $5, 4, 3, 2, 1, \dots, 1$. Сколько единиц имеется в этой последовательности?
8. (1 балл) Подсчитать количество неизоморфных друг другу деревьев на $n \geq 2$ вершинах, диаметр которых меньше или равен трем.
9. (1 балл) Пусть T есть дерево, в котором хотя бы 2 вершины и степень любой вершины, смежной с листом дерева, имеет степень, большую или равную трем. Доказать, что в T обязательно найдется пара листьев, имеющих общего соседа.
10. (1,5 балла) Пусть G есть простой граф с $\delta(G) \geq k$, а T есть произвольное дерево с k ребрами. Доказать, что в G имеется подграф, изоморфный T .