Задача 1, анализ собственных чисел

Дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Какое максимальное и минимальное значение может принимать $x^T Ax$ при $||x|| = 1$?
2. При каком a разница между этими значениями минимально? При каком a отношение этих величин минимально?
3. При каком a минимальное значение максимально? При каком a максимальное значение минимально?

Решение

Для начала заметим, что

$$x^T Ax = (x^T Ax)^T = x^T A^T x = \frac{1}{2} x^T (A + A^T)x.$$

Обозначим $b = \frac{a-1}{2}$ и $B + \frac{1}{2}(A + A^T)$. Матрица B симметрична и имеет следующий вид

$$A = \begin{pmatrix} 2 & b \\ b & -1 \end{pmatrix}$$

Так как B симметрична, то существует ортогональный базис, состоящий из собственных векторов B, обозначим эти вектора v_1 и v_2 и соответственные собственные значения λ_1 и λ_2, тогда любой вектор x представляется в виде $x = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$, а значит

$$\begin{aligned} x^T Bx = (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)^T B(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = (\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)^T (\alpha_1 \lambda_1 v_1 + \alpha_2 \lambda_2 v_2) \\ = \alpha_1^2 \lambda_1 ||v_1||^2 + \alpha_2^2 \lambda 2 ||v_2||^2. \end{aligned}$$

Не умаляя общности можно считать, что $\lambda_1 \leq \lambda_2$ и тогда при $||x|| = 1$

$$\lambda_1 = \lambda_1 ||x||^2 \leq \alpha_1^2 \lambda_1 ||v_1||^2 + \alpha_2^2 \lambda 2 ||v_2||^2 \leq \lambda_2 ||x||^2 = \lambda_2$$

Таким образом наименьшее значение $x^T Ax$ – λ_1, наибольшее – λ_2. Находим λ_1, λ_2 как корни характеристического многочлена:

$$0 = (2 - t)(-1 - t) - b^2 = t^2 - t - b^2 - 2$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4(b^2 + 2)}}{2}$$

значит наибольшее значение – $\frac{1+\sqrt{1+4(b^2+2)}}{2}$, а наименьшее – $\frac{1-\sqrt{1+4(b^2+2)}}{2}$. Наибольшее значение для $\frac{1-\sqrt{1+4(b^2+2)}}{2}$ достигается при $b = 0$ ($a = \frac{1}{2}$) и равно -1, наименьшее значение для $\frac{1+\sqrt{1+4(b^2+2)}}{2}$ также достигается при $b=0$ и равно 2. Наименьшая разность – 3, наименьшее значение $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$ есть $-\infty$.

Задача 2, интерполяция и наилучшее приближение в L^2

Дан набор точек на плоскости:

x	0	1	2	3
y	3	0	-1	2

(a) Найти дифференцируемую функцию $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, график которой проходит по этим точкам

(b) Найти квадратичную функцию g такую, что величина $\sum_{k=1}^{4}|g(x_k)-y_k|^2$ минимальна.

(c) Найти квадратичную функцию h такую, что выражение

$$\int_0^3 (f(x)-h(x))^2 dx$$

минимально, где f – найденная к пункту (a) функция.

Решение

Пункт (a) – интерполяция. Соответствующую функцию можно построить в виде многочлена степени 3. Многочлены Лагранжа для этих точек выглядят следующим образом

$$\begin{aligned}
P_1(x) &= -\frac{1}{6}(x-1)(x-2)(x-3) && = 1-\frac{11}{6}x+x^2-\frac{1}{6}x^3 \\
P_2(x) &= \frac{1}{2}x(x-2)(x-3) && = +3x-\frac{5}{2}x^2+\frac{1}{2}x^3 \\
P_3(x) &= -\frac{1}{2}x(x-1)(x-3) && = -\frac{3}{2}x+2x^2-\frac{1}{2}x^3 \\
P_4(x) &= \frac{1}{6}x(x-1)(x-2) && = \frac{1}{3}x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3 \\
f(x) &= 3-\frac{10}{3}x+\frac{1}{3}x^3
\end{aligned}$$

Пункт (b): обозначим $g(x,a,b,c)=ax^2+bx+c$ и $\phi(a,b,c)=\sum_{k=1}^{4}(g(x_k,a,b,c)-y_k)^2$, тогда для минимума функции ϕ выполняется

$$0=\phi'_a(a,b,c)=\phi'_b(a,b,c)=\phi'_c(a,b,c).$$

Отметим, что ϕ – квадратичная функция и, соответственно, её частные производные – линейные функции, отсюда, уравнение $\nabla\phi = 0_3$ задает линейную систему уравнений 3×3.

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 14 \\ 6 & 14 & 36 \\ 14 & 36 & 98 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix}$$

После приведения методом Гаусса

$$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 14 \\ 0 & 5 & 15 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Наконец решение

$$\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{31}{10} \\ -\frac{49}{10} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}, P(x) = \frac{31}{10} - \frac{49}{10}x + \frac{3}{2}x^2.$$

Пункт (c). Если в пункте (a) был использован способ отличный от интерполяции, то этот пункт может оказаться нерешаемым. Для полиномов же интегрирование производится довольно просто, что позволяет свести нахождение квадратичного приближения к решению линейной системы 3×3 аналогично пункту (b). Пусть $h(x, a, b, c) = ax^2 + bx + c$, тогда

$$\frac{d}{dc}\int_0^3 (f(x) - h(x, a, b, c))^2 dx = \int_0^3 \frac{d}{dc}(f(x) - h(x, a, b, c))^2 dx$$

$$= \int_0^3 2h'_c(x, a, b, c)(h(x, a, b, c) - f(x))dx = \int_0^3 2(h(x, a, b, c) - f(x))dx = 0.$$

Аналогично для b, a получаем

$$0 = \int_0^3 2x(h(x, a, b, c) - f(x))dx = \int_0^3 2x^2(h(x, a, b, c) - f(x))dx$$

Учитывая $f(x) = 3 - \frac{10}{3}x + \frac{1}{3}x^3$ и интегрируя равенства получаем

$$\begin{pmatrix} 3 & \frac{9}{2} & 9 \\ \frac{9}{2} & 9 & \frac{81}{4} \\ 9 & \frac{81}{4} & \frac{243}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{3}{10} \\ 0 \end{pmatrix}$$

После приведения

$$\begin{pmatrix} 3 & \frac{9}{2} & 9 \\ 0 & \frac{9}{4} & \frac{27}{4} \\ 0 & 0 & \frac{27}{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ -\frac{57}{40} \\ \frac{81}{40} \end{pmatrix}$$

Решение:

$$\begin{pmatrix} c \\ b \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{69}{20} \\ -\frac{77}{15} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \; h(x) = \frac{69}{20} - \frac{77}{15}x + \frac{3}{2}x^2.$$

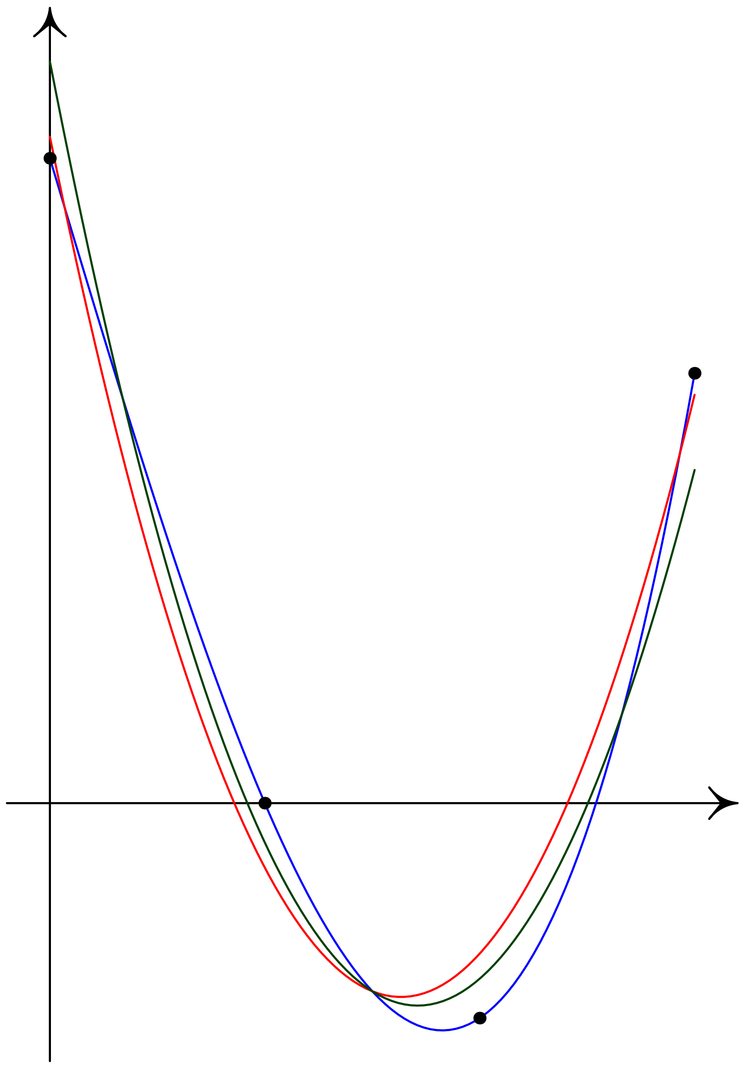

Рис. 1: $f(x)$ – синяя кривая, $g(x)$ – красная, $h(x)$ – зеленая

Задача 3, полиномы Лежандра

Найти многочлен $P(x)$ степени 2 со старшим коэффициентом 1, для которого величина

$$\int_{-1}^{1} P(x)^2 dx$$

минимальна.

Решение

Пусть $P(x) = x^2 + \alpha x + \beta$. Заметим, что $\int_{-1}^{1} P(x)dx$ – квадратичная функция по α, β, более того, очевидно, что можно подобрать параметры так, чтобы сделать интеграл сколь угодно большим, значит для нахождения минимума достаточно приравнять производные по α, β нулю:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{-1}^{1} P(x)dx = \int_{-1}^{1} 2x(x^2 + \alpha x + \beta)dx = \frac{4}{3}\alpha = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{-1}^{1} P(x)dx = \int_{-1}^{1} 2(x^2 + \alpha x + \beta)dx = \frac{4}{3} + 4\beta = 0,$$

что дает

$$P(x) = x^2 - \frac{1}{3}$$

Замечание. Многочлены такого радо называются Многочлены Лежандра

Задача 4, метод множителей Лагранжа

Минимизировать xyz при условии $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Решение

Пусть $F(x, y, z, \lambda) = xyz - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$. Согласно методу множителей Лагранжа, если x, y, z – решение задачи, то оно удовлетворяет $0 = \frac{d}{dx}F(x, y, z^*, \lambda) = \frac{d}{dz}F(x, y, z, \lambda) = \frac{d}{dy}F(x, y, z, \lambda)$, отсюда получаем систему

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ yz - 2x\lambda = 0 \\ xz - 2y\lambda = 0 \\ xz - 2z\lambda = 0 \end{cases}$$

Комбинируем 2-3, 3-4, 2-4 и получаем $x = 0$ или $y^2 = z^2$, $y = 0$ или $x^2 = z^2$, $z = 0$ или $y^2 = x^2$, из чего заключаем, что $x^2 = y^2 = z^2$, таким образом минимум достигается при $x = y = z = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ либо, если две переменных равны $\frac{1}{\sqrt{3}}$ и одна $-\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Задача 5, простая

Найти прямоугольный треугольник наибольшей площади при условии, что сумма длин катетов равна единице.

Решение

Площадь треугольника со катетами x, $1-x$ равна $x(1-x)$. Дифференцируя получаем $1-2x$, что дает $x = \frac{1}{2}$.