Комбинаторный смысл произведения производящих функций

1. Пусть имеется пара обыкновенных производящих функций

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots,$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots + b_nx^n + \ldots.$$

Произведением этих функций, по определению, называется обыкновенная производящая функция

$$h(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n + \ldots, \qquad c_n = \sum_{i=0}^{n} a_ib_{n-i}.$$

Комбинаторный смысл этой операции следующий. Мы берем линейно упорядоченное множество (дни в календаре, люди в очереди, солдаты в строю) и делим это множество на две части таким образом, чтобы в первой части содержались первые i элементов, а во второй части — последние $n-i$ элементов. Число i при этом может быть выбрано произвольно в диапазоне от 0 до n. Затем мы вводим число a_n как количество способов совершить некоторое действие на n-элементном множестве (например, линейно упорядочить это подмножество; тогда $a_n = n!$; или выбрать некоторое подмножество; тогда $a_n = 2^n$). Далее, мы вводим b_n как количество способов совершить еще одно (возможно, то же самое, возможно, другое) действие на n-элементном множестве. Тогда количество c_n способов разбить линейно упорядоченное n-элементное множество на два непересекающихся подмножества, совершить действие 1 на первом из них и действие 2 на втором из них, описывается с помощью производящей функции $h(x)$.

2. Пусть теперь имеется пара экспоненциальных производящих функций

$$F(x) = a_0 + a_1\frac{x}{1!} + a_2\frac{x^2}{2!} + \ldots + a_n\frac{x^n}{n!} + \ldots,$$

$$G(x) = b_0 + b_1\frac{x}{1!} + b_2\frac{x^2}{2!} + \ldots + b_n\frac{x^n}{n!} + \ldots.$$

Произведением этих функций, по определению, называется экспоненциальная производящая функция

$$H(x) = c_0 + c_1\frac{x}{1!} + c_2\frac{x^2}{2!} + \ldots + c_n\frac{x^n}{n!} + \ldots, \qquad c_n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_ib_{n-i}.$$

Комбинаторный смысл этой операции тот же, что и в случае произведения обыкновенных производящих функций, за одним исключением. Мы теперь берем произвольное n-множество и разбиваем его на два подмножества таким образом, чтобы в первом содержалось i (не обязательно первых) элементов, а во втором $n-i$ (не обязательно последних) элементов. Все остальное — аналогично случаю произведения обыкновенных производящих функций.

3. Пример 1. В осеннем семестре у преподавателя n рабочих дней, и он хочет поделить его на две части. Первую часть (первые k дней) он хочет посвятить теории, а вторую часть (последние $n-k$ дней) — практике. В первой части преподаватель может выбрать один рабочий день для того, чтобы съездить в командировку. Во второй части он может взять два дня отгула. Сколькими способами преподаватель может спланировать свой осенний семестр?

Решение. Количество способов выбора одного элемента из n-элементного множества равно

$$a_n = \binom{n}{1} = n,$$

а количество способов выбора двух элементов равно

$$b_n = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Следовательно, при фиксированном k у преподавателя имеется

$$a_k b_{n-k} = k\,\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$$

способов выбрать один день на командировку в первой части семестра и два дня отгула во второй части семестра. Таким образом, всего преподаватель может

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} k\,\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$$

способами организовать свою работу в осеннем семестре.

Для нахождения более компактной формы записи решения рассмотрим обыкновенные производящие функции

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\,x^n \qquad \text{и} \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2}\,x^n.$$

Так как

$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}, \qquad \left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} n x^{n-1},$$

то

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\,x^n = x \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} n x^{n-1} = x \cdot \frac{1}{(1-x)^2} = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Далее,

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)'' = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2},$$

поэтому

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2}\,x^n = \frac{x^2}{2} \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{2}{(1-x)^3} = \frac{x^2}{(1-x)^3}.$$

Следовательно,

$$h(x) = f(x) \cdot g(x) = \frac{x^3}{(1-x)^5} = x^3 \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+4}{4} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \binom{n+4}{4} x^{n+3} = \sum_{k=3}^{+\infty} \binom{k+1}{4} x^k,$$

откуда следует, что

$$c_n = \binom{n+1}{4}, \qquad n = 3, 4, \ldots$$

4. Пример 2. Что изменится, если теперь у преподавателя лекции и практики могут идти вперемешку?

Решение. В этом случае преподаватель может $\binom{n}{k}$ способами выбрать k рабочих дней в качестве лекций, $a_k = k$ способами выбрать из них один день на командировку и $b_{n-k} = \binom{n-k}{2}$ способами выбрать два дня отгула вместо практик. Общее число способов организовать свой семестр у преподавателя теперь равно

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k \,\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}.$$

Для того, чтобы упростить ответ, введем экспоненциальные производящие функции

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} n\,\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{(n-1)!} = x \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = x \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = x \cdot \exp(x)$$

и

$$G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n(n-1)}{2}\,\frac{x^n}{n!} = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{2}\frac{x^n}{(n-2)!} = \frac{x^2}{2} \cdot \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} = \frac{x^2}{2} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = \frac{x^2}{2} \cdot \exp(x).$$

Тогда

$$H(x) = F(x) \cdot G(x) = \frac{x^3}{2} \cdot \exp(2x) = \frac{x^3}{2} \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} 2^k \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{k-1} \frac{x^{k+3}}{k!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{k-1}(k+3)(k+2)(k+1)\frac{x^{k+3}}{(k+3)!} = \sum_{n=3}^{+\infty} 2^{n-4} n(n-1)(n-2)\frac{x^n}{(n)!},$$

и поэтому ответ можно записать в следующей компактной форме:

$$c_n = n(n-1)(n-2)2^{n-4}, \qquad n = 3, 4, \ldots$$