Интегралы с параметром. 21.02.18

Если при каждом $\alpha \in E \subset \mathbb{R}$ функция $f(x;a)$ интегрируема по Риману как функция от x на $[a;b]$, то интеграл $I(\alpha) = \int_a^b f(x,\alpha)\,dx$ называют интегралом, зависящим от параметра α. Более общий вид — $\Phi(\alpha) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} f(x,\alpha)\,dx$.

Непрерывность. Если функция f непрерывна в прямоугольнике $K = [a;b] \times [\alpha_1;\alpha_2]$, то $I(\alpha)$ непрерывна на $[\alpha_1;\alpha_2]$. В частности, возможен предельный переход при $\alpha \to \alpha_0 \in [\alpha_1;\alpha_2]$ под знаком интеграла.

Дифференцирование. Если функции f и $\frac{\partial f}{\partial \alpha}$ непрерывны в прямоугольнике K, то $I(\alpha)$ непрерывно дифференцируемая на $[\alpha_1;\alpha_2]$ и $I'(\alpha) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial \alpha}\,dx$.

Если к тому же φ и ψ дифференцируемы на $[\alpha_1;\alpha_2]$, а их значения принадлежат $[a;b]$, то $\Phi'(\alpha) = f(\psi(\alpha),\alpha)\psi'(\alpha) - f(\varphi(\alpha),\alpha)\varphi'(\alpha) + \int_{\varphi(\alpha)}^{\psi(\alpha)} \frac{\partial f(x,\alpha)}{\partial \alpha}\,dx$.

Интегрирование. Если функция f непрерывна в прямоугольнике K, то $I(\alpha)$ интегрируема на $[\alpha_1;\alpha_2]$ и порядок интегрирования можно менять.

1. Найдите $\lim_{\alpha\to 0} \int\limits_2^4 \dfrac{x\,dx}{1+x^2+\alpha^6}$.

2. Вычислите производную функции $\Phi(\alpha) = \int\limits_{\alpha}^{2\alpha} \dfrac{\sin \alpha x}{x}\,dx$.

3. Пользуясь тем, что $\int\limits_0^1 \dfrac{d\alpha}{1+x^2\alpha^2} = \dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$, вычислите $\int\limits_0^1 \dfrac{\operatorname{arctg} x\,dx}{x\sqrt{1-x^2}}$.

4. Вычислите $I = \int\limits_0^1 \dfrac{x^b - x^a}{\ln x} dx$, $0 < a \leqslant b$.

5. Вычислите $I(\alpha) = \int\limits_0^{\pi/2} \ln(\alpha^2 - \sin^2 x) dx$, $\alpha > 1$.

6. С помощью дифференцирования интеграла $\int\limits_0^b \dfrac{dx}{x^2+\alpha^2}$ вычислите $\int\limits_0^b \dfrac{dx}{(x^2+\alpha^2)^2}$, при $b > 0$.

7. Найдите какую-нибудь дважды дифференцируемую функцию φ, удовлетворяющую уравнению $\varphi(x) = x + \int\limits_0^x (y-x)\varphi(y)\,dy$.

Несобственные интегралы. Пусть $\int_a^\infty f(x,\alpha)\,dx$ сходится при каждом $\alpha \in E$. Если $\forall \varepsilon > 0$ существует δ_ε, что для всех $\alpha \in E$ и для всех $\xi \geqslant \delta_\varepsilon$ выполняется неравенство $|\int_\xi^\infty f(x,\alpha)\,dx| < \varepsilon$, то интеграл сходится равномерно. Если $\exists \varepsilon_0 > 0$ такое, что для любого $\delta \in [a;\infty)$ найдутся $\alpha_\delta \in E$ и $\xi_\delta \geqslant \delta$ такие, что $|\int_{\xi_\delta}^\infty f(x,\alpha_\delta)\,dx| \geqslant \varepsilon_0$, то интеграл сходится неравномерно.

Равномерная сходимость интеграла равносильна условию

$$\sup_{\alpha\in E} \int_\xi^\infty f(x,\alpha_\delta)\,dx \to 0 \text{ при } \xi \to \infty.$$

Признак Вейерщтрасса. Если на промежутке $[a,+\infty)$ существует функция $\varphi(x)$ такая, что $|f(x;\alpha)| \le \varphi(x)$ для всех $x \in [a;\infty]$ и для всех $\alpha \in E$ и если интеграл $\int_a^\infty \varphi(x)dx$ сходится, то интеграл сходится абсолютно и равномерно на множестве E.

Критерий Коши. Интеграл сходится равномерно на множестве E тогда и только тогда, когда выполняется условие Коши: для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta_\varepsilon \in (a;\infty)$ такое, что для любых $\xi' \in [\delta_\varepsilon;\infty]$, $\xi'' \in [\delta_\varepsilon;\infty]$ и для всех $a \in E$ выполняется неравенство

$$|\int_{\xi'}^{\xi''} f(a;\alpha)dx| < \varepsilon.$$

Признак Дирихле. Интеграл

$$\int_a^\infty f(x;\alpha)g(x;\alpha)dx$$

сходится равномерно по α на множестве E, если при каждом фиксированном $\alpha \in E$ функции f, g, g'_x непрерывны по x на множестве $[a,\infty]$ и удовлетворяют следующим условиям:

1. $g(x;a) \to 0$ при $x \to \infty$ равномерно относительно $\alpha \in E$;

2. функция $g'_x(x;\alpha)$ для каждого фиксированного $\alpha \in E$ не меняет знака при изменении x на промежутке $[a;+\infty)$;

3. функция f для каждого $\alpha \in E$ имеет ограниченную первообразную, т.е. существует число $M > 0$ такое, что
$$|\int_a^x f(t;a)dt| \leq M$$
для всех $x \in [a;\infty)$ и для всех $\alpha \in E$.

Непрерывность равномерно сходящегося интеграла по параметру. Если функция $f(x;a)$ непрерывна на множестве
$$D = \{(x;a) : a \leq x < \infty, \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2\}$$
и если интеграл $I(\alpha) = \int_a^\infty f(x;\alpha)dx$ сходится равномерно по α на отрезке $[\alpha_1;\alpha_2]$, то функция $I(\alpha)$ непрерывна на отрезке $[\alpha_1;\alpha_2]$.

Исследуйте интегралы на равномерную сходимость на заданном множестве.

1. $I(\alpha) = \int\limits_2^\infty \dfrac{dx}{x \ln^\alpha x}$, $E = [\alpha_0;\infty), \alpha_0 > 1$.
2. $I(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^\infty \dfrac{\cos(\alpha x)\,dx}{4+x^2}$, $E = \mathbb{R}$.
3. $I(\alpha) = \int\limits_0^\infty \dfrac{\sin(\alpha x)\,dx}{x}$, $E = [b;\infty), b > 0$.
4. $I(\alpha) = \int\limits_0^\infty \dfrac{\sin(\alpha x)\,dx}{x}$, $E = [0;1]$.
5. $I(\alpha) = \int\limits_0^\infty e^{-\alpha x^2}\,dx$, $E = (0;+\infty)$.
6. Исследуйте на непрерывность функцию $F(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} \dfrac{x\,dx}{2+x^\alpha}$ на $E = (2;+\infty)$.
7. Исследуйте на непрерывность функцию $F(\alpha) = \int\limits_0^{+\infty} æ^{-\alpha^2 x}\,dx$ на $E = \mathbb{R}$.