Элементарная комбинаторика

1 Основные правила перечислительной комбинаторики

1. Напомним вначале основные понятия теории множеств.

1.1. *Определение.* Множеством $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ называется совокупность различимых объектов x_i, $i = 1, \ldots, n$, объединенных по некоторому признаку.

`Пример:` студенты в аудитории; все студенты различимы, отличны друг от друга и объединены по признаку "собрались в данной аудитории".

Мощностью $|X|$ множества X называется количество элементов в нем. Как правило, мы будем рассматривать конечные множества, в которых $|X| = n$, $n \in \mathbb{N}$, и называть их называть n-множествами.

1.2. Основные операции над множествами — объединение, пересечение, разность, дополнение — удобно изучать графически, с использованием т.н. диаграмм Эйлера-Венна. Например, с их помощью достаточно просто проиллюстрировать справедливость законов де Моргана

$$A' \cap B' = (A \cup B)', \qquad\qquad A' \cup B' = (A \cap B)'.$$

1.3. *Определение.* Семейство множеств $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ называется *покрытием* множества X, если их объединение дает нам все множество X:

$$X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_k = X.$$

Важным частным случаем покрытия является понятие разбиения множества.

Определение. Говорят, что семейство множеств $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ образует *разбиение* множества X, если

1. множества $X_i \neq \varnothing$, $i = 1, \ldots, n$;
2. $X_i \cap X_j = \varnothing \ \ \forall i \neq j$;
3. $X_1 \cup X_2 \bigcup \ldots \cup X_k = X$.

Элементы X_i этого семейства называются *блоками* разбиения.

`Пример:` разбиение студентов курса на группы.

Если важен порядок следования блоков, то говорят об *упорядоченном разбиении.* Например, если мы выводим группы на сцену для вручения им дипломов, то важен порядок, в каком они туда выходят; поэтому в данном случае мы имеем понятие упорядоченного разбиения.

Наконец, еще одним частным случаем покрытия X семейством множеств $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$ является понятие *разделения* множества X; это есть аналог упорядоченного разбиения, в котором допускаются пустые блоки. Точное определение таково:

Определение. Разделение — это упорядоченное семейство $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$, состоящее из *фиксированного* количества k попарно непересекающихся, и, возможно, пустых множеств, объединение которых дает все X.

1.4. *Определение.* Декартовым произведением множеств A и B называется множество

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$$

всех упорядоченных пар (a, b), таких, что $a \in A$, $b \in B$.

В качестве простейшего примера декартова произведения множеств обычно приводят шахматную доску; любая клетка шахматной доски имеет координаты 'буква-цифра', например, $e5$ или $h4$. Иными словами, координаты клеток шахматной доски являются элементами декартова произведения множеств $A = \{a, b, \ldots, h\}$ и $B = \{1, 2, \ldots, 8\}$.

В частном случае множества A и B могут совпадать; в этом случае декартово произведение $A \times A$ обозначается через $A^{(2)}$.

Определение. Декартовым произведением k множеств $X_1, X_2, \ldots, X_k$ называется множество

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k := \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \mid x_i \in X_i,\ \forall\ i = 1, \ldots, k\}$$

всевозможных упорядоченных k-элементных строк вида $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

В частном случае $X_1 = X_2 = \ldots = X_k = X$ имеем $X \times X \times \ldots \times X =: X^{(k)}$. По сути, любой элемент $X^{(k)}$ есть упорядоченное k-множество, в котором некоторые элементы могут повторяться. Если же в таком k-множестве порядок элементов не важен, говорят о *k-мультимножестве над множеством X*.

`Пример:` монеты в кошельке; в этом случае в качестве множества X выступает множество из девяти монет разного достоинства:

$$X = \{1 \text{ копейка, } 5 \text{ копеек, } 10 \text{ копеек, } 50 \text{ копеек, } 1 \text{ рубль, } 2 \text{ рубля, } 5 \text{ рублей, } 10 \text{ рублей}\};$$

любой набор этих монет в количестве k штук образует k-мультимножество над этим множеством X.

1.5. В комбинаторике для некоторых наиболее важных понятий теории множеств введены следующие специальные понятия:

1. k-сочетанием без повторений называется любое k-элементное подмножество n-множества;
2. k-перестановкой без повторений называется упорядоченное k-подмножество n-множества;
3. k-перестановкой с повторениями называется любой элемент декартовой степени $X^{(k)}$;
4. k-сочетанием с повторениями называется любое k-мультимножество над n-множеством.

2. Теперь перейдем к двум самым простым, но в то же время достаточно важным правилам перечислительной комбинаторики — правилу суммы и правилу произведения.

2.1. Начнем с простейшего примера: пусть на одном блюде лежат три яблока, а на втором — две груши; сколькими способами можно выбрать один фрукт? Очевидный ответ: $3 + 2 = 5$-ю способами.

2.2. Простейшее *правило суммы* можно сформулировать так: если некоторый объект из множества A можно выбрать k способами, и, вне зависимости от выбора этого элемента, можно n способами выбрать другой элемент из множества B, то выбор объекта из множества A *или* из множества B можно осуществить $k+n$ способами.

2.3. Очевидно, что на языке теории множеств это правило формулируется следующим образом: пусть имеются два непересекающихся множества A, $|A|=k$, и B, $|B|=n$; тогда

$$|A \cup B| = k+n.$$

2.4. В более общем случае: для любого *разбиения* конечного множества X справедливо равенство

$$|X| = |X_1| + |X_2| + \ldots + |X_k|;$$

это равенство и называется правилом суммы в комбинаторике.

2.5. Под правилом произведения в комбинаторике понимается равенство

$$|X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_k| = |X_1| \cdot |X_2| \cdot \ldots \cdot |X_k|.$$

Простейший пример на применение этого правила в комбинаторике: пусть в аудитории находятся 32 представителя подгруппы SE, 8 представителей подгруппы CS и 4 представителя подгруппы BI; сколькими способами можно выбрать тройку, состоящую из представителей каждой подгруппы? Очевидно, что $32 \cdot 8 \cdot 4$ способами.

3. Наряду с правилом суммы, в элементарной комбинаторике также достаточно часто используется и несложное его обобщение — так называемый *принцип включения-исключения*. Если правило суммы связано с разбиением множества X, то принцип включения-исключения связан с некоторым произвольным покрытием этого n-множества семейством множеств $\{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$. Сформулируем его вначале для самого простого случая двух множеств, а затем обобщим на случай n множеств.

3.1. Рассмотрим два конечных множества A и B, пересечение которых может быть и непусто. Тогда количество элементов в объединении этих множеств, очевидно, равно

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|. \tag{1}$$

Действительно, когда мы считаем количество $|A|$ элементов в множестве A и складываем его с количеством $|B|$ элементов в множестве B, мы любой элемент, принадлежащий как множеству A, так и множеству B, считаем дважды. Чтобы этот избыток убрать, нам нужно один раз вычесть количество элементов, содержащихся в пересечении этих двух множеств.

Равенство (1) можно называть обобщенным правилом суммы; оно обобщает правило суммы на случай, когда пересечение двух множеств не пусто.

3.2. Предположим теперь, что A и B являются подмножествами некоторого более широкого множества X. В этом случае у любого подмножества $A \subset X$ имеется дополнение к нему — подмножество A', и $A \cap A' = X$. При этом, так как $A \cup A' = \varnothing$, то, согласно правилу суммы, имеет место равенство $|A| + |A'| = |X|$.

Рассмотрим теперь пересечение $A' \cap B'$ дополнений множеств A и B. Согласно одной из теорем де Моргана, $A' \cap B' = (A \cup B)'$. Следовательно, количество элементов в этом пересечении с учетом последнего равенства и обобщенного правила суммы (1) можно сосчитать так:

$$|A' \cap B'| = |(A \cup B)'| = |X| - |A \cup B| = |X| - |A| - |B| + |A \cap B|.$$

Равенство

$$|A' \cap B'| = |X| - |A| - |B| + |A \cap B|, \tag{2}$$

и называется в комбинаторике принципом включения-исключения.

3.3. Приведем простейший пример его использования. Пусть в аудитории находятся 30 человек, 20 человек из которых знают английский, 12 — французский, а 6 человек знают оба языка. Сколько человек не знает ни один из этих иностранных языков? Ответ, согласно принципу включения-исключения (2), следующий:

$$N = 30 - 20 - 12 + 6 = 4.$$

3.4. Несложно обобщить равенства (1) и (2) на случай большего количества множеств. Так, для трех множеств A, B, C соответствующие формулы выглядят так:

а) обобщенное правило суммы:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|; \tag{3}$$

б) принцип включения-исключения:

$$|A' \cap B' \cap C'| = |X| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|.$$

`Упражнение 1.` Доказать следующую двойственную к (3) формулу:

$$|A \cap B \cap C| = |A| + |B| + |C| - |A \cup B| - |A \cup C| - |B \cup C| + |A \cup B \cup C|.$$

`Упражнение 2.` Выписать и доказать аналогичные формулы для общего случая k множеств.

2 k-сочетания из n элементов. Биномиальные коэффициенты.

1. В качестве первого важного примера на применение описанных в первом параграфе правил сосчитаем количество k-сочетаний без повторений; раньше в советской литературе это число обозначалось через C_n^k; современное обозначение для этих чисел $\binom{n}{k}$ (читается "из n по k").

1.1. Обычно на вопрос, чему равно это число, вспоминают явную формулу

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}.$$

Однако для расчетов более удобна рекуррентная формула, которая выводится с помощью правила суммы.

1.2. Введем множество Σ_k всех k-элементных подмножеств n-элементного множества X. Например, для $X = \{x_1, x_2, x_3\}$ множество $\Sigma_2 = \{\{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}\}$. Разобьем Σ_k на два блока — блок $\Sigma_k^{(1)}$, k-элементные подмножества которого содержат элемент x_1, и блок $\Sigma_k^{(2)}$, подмножества которого этот элемент не содержат. Понятно, что это — непустые, непересекающиеся подмножества, объединение которых дает нам все множество Σ_k. Поэтому по правилу суммы

$$\binom{n}{k} = |\Sigma_k| = |\Sigma_k^{(1)}| + |\Sigma_k^{(2)}|.$$

Осталось сосчитать количество элементов в каждом из блоков $\Sigma_k^{(1)}$, $\Sigma_k^{(2)}$. А это делается довольно легко.

1.3. Действительно, во всех подмножествах первого блока элемент x_1 уже выбран, и нам остается выбрать $(k-1)$-элементные подмножества из $(n-1)$-элементного множества $X \backslash x_1$; сделать это можно $\binom{n-1}{k-1}$ способами. Во втором блоке содержатся k-элементные подмножества множества $X \backslash x_1$, состоящего из $(n-1)$-го элемента. Их количество, очевидно, равно $\binom{n-1}{k}$. Таким образом окончательно имеем следующее рекуррентное соотношение:

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \qquad k \geqslant 1, \quad n \geqslant 1. \tag{4}$$

1.4. Соотношение (4) следует дополнить начальными и граничными условиями. Так как k-элементных подмножеств n-элементного множества в случае $k > n$ не существует, то

$$\binom{n}{k} = 0 \qquad \text{при} \quad k > n.$$

Далее, пустое подмножество можно выбрать всегда и только одним способом; поэтому

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \forall\ n \neq 0.$$

Используя эти условия, можно шаг за шагом вычислить коэффициенты $\binom{n}{k}$ и построить так называемый треугольник Паскаля:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & \dots & & & &
\end{array}$$

1.5. Как видно, треугольник Паскаля симметричен, т.е. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Комбинаторное доказательство этого факта очевидно: выбирая любое k-элементное множество, мы, тем самым, однозначно выбираем и дополнение к нему, т.е. $(n-k)$-элементное множество; следовательно, количество k-элементных и $(n-k)$-элементных подмножеств совпадает.

1.6. Наряду с треугольником Паскаля мы будем также активно пользоваться и другим графическим представлением чисел $\binom{n}{k}$. Именно, рассмотрим координатную плоскость (n, k), и в точках с координатами (n, k), $n \geqslant 0$, $k = 0, \ldots, n$ отметим числа $\binom{n}{k}$:

$$\begin{array}{lllll} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ 1 & 4 & 6 & 4 & 1 \end{array}$$

Заметим, что в таком представлении числа $\binom{n}{k}$ можно трактовать как количество различных путей, состоящих из диагональных $(1, 1)$ и вертикальных $(1, 0)$ отрезков, выходящих из начала координат — точки $(0, 0)$, и оканчивающихся в точке с координатами (n, k). Для этого представления рекуррентное соотношение (4) можно трактовать следующим образом: количество путей в точку с координатами (n, k) складывается из количества путей, приходящих в точку с координатами $(n-1, k-1)$, и из количества путей, приходящих в точку с координатами $(n-1, k)$.

2. В качестве следующего применения правила суммы в комбинаторике докажем следующее важное тождество для коэффициентов $\binom{n}{k}$ — формулу суммирования по верхнему индексу:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \underbrace{\binom{0}{m} + \binom{1}{m} + \ldots + \binom{m-1}{m}}_{=0} + \binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \ldots + \binom{n}{m} = \sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}. \tag{5}$$

2.1. Для формального доказательства этого тождества применим рекуррентное соотношение (4) к коэффициенту $\binom{k+1}{m+1}$:

$$\binom{k+1}{m+1} = \binom{k}{m} + \binom{k}{m+1} \qquad \Longrightarrow \qquad \binom{k}{m} = \binom{k+1}{m+1} - \binom{k}{m+1}$$

Просуммируем теперь полученное равенство по k от m до n:

$$\begin{aligned} \sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} &= \binom{n+1}{m+1} + \sum_{k=m}^{n-1} \binom{k+1}{m+1} - \sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m+1} = \\ &= \binom{n+1}{m+1} + \sum_{k=m}^{n-1} \binom{k+1}{m+1} - \sum_{k=m+1}^{n} \binom{k}{m+1} = \\ &= \binom{n+1}{m+1} + \sum_{k'=m+1}^{n} \binom{k'}{m+1} - \sum_{k=m+1}^{n} \binom{k}{m+1} = \binom{n+1}{m+1}. \end{aligned}$$

2.2. Комбинаторное доказательство тождества (5) основано на следующем общем подходе: мы разбиваем множество Σ_{m+1} всех $(m+1)$-элементных подмножеств $(n+1)$-элементного множества $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}\}$ на блоки, подсчитываем количество элементов в каждом блоке, а затем пользуемся правилом суммы для подсчета числа $|\Sigma_{m+1}| = \binom{n+1}{m+1}$.

Разбиение множества Σ_{m+1} будем проводить следующим образом. В первый блок разбиения мы включим все $(m+1)$-элементные подмножества, содержащие элемент x_{n+1}; во второй —

$(m+1)$-элементные подмножества, содержащие x_n и не содержащие x_{n+1}; в третий — $(m+1)$-элементные подмножества, содержащие x_{n-1} и не содержащие x_n и x_{n+1} и т.д. В последний блок включим $(m+1)$-элементное подмножество, не содержащее элементов $x_{m+2}, \ldots, x_n, x_{n+1}$, т.е. подмножество $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, x_{m+1}\}$.

Число элементов в первом блоке равно $\binom{n}{m}$, во втором — $\binom{n-1}{m}$, в третьем — $\binom{n-2}{m}$, и так далее. В последнем блоке содержится ровно один элемент. Складывая эти коэффициенты, получаем тождество (5).

`Пример.` Пусть $n = 4$, $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$, $m = 2$, $m + 1 = 3$; приведем список всех трехэлементных подмножеств этого множества:

$$\{x_1, x_2, x_3\}, \qquad \{x_1, x_2, x_4\}, \qquad \{x_1, x_2, x_5\}, \qquad \{x_1, x_3, x_4\}, \qquad \{x_1, x_3, x_5\},$$

$$\{x_1, x_4, x_5\}, \qquad \{x_2, x_3, x_4\}, \qquad \{x_2, x_3, x_5\}, \qquad \{x_2, x_4, x_5\}, \qquad \{x_3, x_4, x_5\}.$$

В первый блок разбиения этого множества подмножеств включим подмножества, содержащие элемент x_5; таковых имеется $\binom{4}{2} = 6$ штук. Из *оставшегося* списка выберем все подмножества, содержащие x_4; их $\binom{3}{2} = 3$ штуки. Наконец, у нас остается единственное подмножество элементов, не содержащих ни x_4, ни x_5, т.е. подмножество $\{x_1, x_2, x_3, \}$.

3. `Упражнение.` Доказать комбинаторно следующие тождества:

3.1. Формула суммирования по диагонали

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}.$$

3.2. Тождество Вандермонта

$$\binom{n+m}{k} = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \cdot \binom{m}{k-i}.$$

4. Коэффициенты $\binom{n}{k}$ часто называют биномиальными коэффициентами. Название это связано с тем, что они, в частности, встречаются в формуле бинома Ньютона

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \, y^{n-k}. \tag{6}$$

4.1. Комбинаторное доказательство этой формулы довольно элементарно: нужно просто расписать $(x+y)^n$ в виде произведения n сомножителей

$$(x+y)^n = \underbrace{(x+y)}_{1} \cdot \underbrace{(x+y)}_{2} \cdot \ldots \cdot \underbrace{(x+y)}_{n}.$$

После перемножения этих скобок в правой части будут стоять слагаемые вида $x^k y^{n-k}$, $k = 0, 1, \ldots, n$. Количество таких слагаемых при фиксированном k равно, очевидно, количеству способов выбора k сомножителей x среди n сомножителей, стоящих в правой части. А это количество и есть, по определению, число $\binom{n}{k}$.

4.2. Формула (6) оказывается чрезвычайно полезной для вывода разного рода соотношений, связанных с биномиальными коэффициентами. Например, полагая в ней $x = y = 1$, получаем тождество

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Иными словами, мы формально доказали тот факт, что количество *всех* подмножеств данного n-множества равно 2^n. Комбинаторное доказательство этого факта будет дано в следующем параграфе.

4.3. Далее, полагая в (6) $x = -1$, $y = 1$, получаем важное тождество

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0.$$

4.4. Наконец, продифференцируем (6) по x:

$$n\,(x+y)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} x^{k-1}\, y^{n-k}.$$

Подставляя в это равенство $x = y = 1$, получим еще одно полезное равенство:

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n\, 2^{n-1}.$$

5. Перейдем теперь к задачам, связанным с подсчетом k-сочетаний с повторениями.

5.1. Начнем с примера. Пусть множество X состоит из двух чисел 1 и 2. Выпишем все 3-сочетания с повторениями из 2-множества X:

$$\{1,1,1\}, \qquad \{1,1,2\}, \qquad \{1,2,2\}, \qquad \{2,2,2\}.$$

Как видно, таковых оказалось 4 штуки. Как подсчитать это количество в общем случае?

5.2. Для решения данной задачи воспользуемся чрезвычайно полезным и часто использующимся в комбинаторике *принципом биекции.* Формально этот принцип можно сформулировать следующим образом: пусть X, Y — пара конечных множеств, и пусть существует биекция $f : X \to Y$, т.е. такое отображение, что

$$\forall\, y \in Y \qquad \exists!\, x \in X : \qquad y = f(x).$$

Тогда количество элементов в множествах X и Y совпадают: $|X| = |Y| = n$.

5.3. Неформально использование принципа биекции можно проиллюстрировать на следующем примере. Предположим, что вы устраиваете вечеринку и приглашаете на нее довольно много друзей. Как гостеприимный хозяин, вы встречаете всех своих друзей на входе в дом, но запоминаете только пришедших к вам девушек. В какой-то момент вы решаете подсчитать, сколько парней пришло к вам на вечеринку. Вы знаете количество пришедших к вам девушек, и вам кажется, что количество девушек и парней одинаково. Как вам быстро проверить это предположение? Ответ достаточно очевиден: попросить каждую девушку взять ровно одного парня за руку. Если в результате этой процедуры все множество гостей разбилось на пары, то ваше предположение окажется верным. Тем самым вы сильно упростили себе жизнь — вам не пришлось проделывать довольно утомительную работу по пересчету пришедших к вам парней; вы просто воспользовались для их подсчета результатом уже проделанной работы по пересчету пришедших к вам девушек.

5.4. Вернемся теперь к задаче подсчета всех k-сочетаний с повторениями, т.е. всех k-мультимножеств над n-множеством X. Сосчитаем вначале количество таких мультимножеств в случае, когда n-множество $X = [n] =: \{1, 2, \ldots, n\}$. Заметим, что любое такое мультимножество может быть записано в следующем виде:

$$1 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_k \leqslant n.$$

Например, 3-мультимножество $\{1, 1, 2\}$ над 2-множеством $X = \{1, 2\}$ можно записать так:

$$1 \leqslant (a_1 = 1) \leqslant (a_2 = 1) \leqslant (a_3 = 2) \leqslant (n = 2).$$

Теперь превратим в этой цепочке все нестрогие неравенства в строгие. Для этого мы к a_2 прибавим единицу, к a_3 — двойку, к a_4 — тройку, и так далее. К последнему числу a_n мы, таким образом, добавим число $(k-1)$. В результате получим цепочку строгих равенств вида

$$1 \leqslant a_1 < a_2 + 1 < a_3 + 2 < a_4 + 3 < \ldots < a_k + (k-1) \leqslant n + (k-1).$$

В нашем примере

$$1 \leqslant (a_1 = 1) < (a_2 + 1 = 2) < (a_3 + 2 = 4) \leqslant (n + (3 - 1) = 4).$$

Теперь: зачем нам все это было нужно? Дело в том, что в результате этой операции мы получили некоторое k-элементное подмножество *различных* чисел вида $a_i + (i-1)$ множества $\widetilde{X} = [n + k - 1]$ всех чисел от единицы до $n + k - 1$. Иными словами, мы сопоставили любому k-мультимножеству над множеством $X = [n]$ вполне определенное k-подмножество множества $\widetilde{X} = [n + k - 1]$. Очевидно, что это сопоставление взаимно-однозначно. Но: количество всех k-подмножеств данного множества мы знаем — оно равно $\binom{n+k-1}{k}$. Следовательно, этому числу равно, по принципу биекции, и количество всех k-мультимножеств над множеством $X = [n]$.

5.5. Количество всех k-сочетаний с повторениями над n-множеством X обычно обозначается следующим образом: $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$. Мы, таким образом, доказали, что в случае $X = [n]$

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \binom{n+k-1}{k}.$$

Справедливость этого равенства для произвольного n-множества X следует из принципа биекции.

5.6. `Упражнение 1.` Доказать формально и комбинаторно следующее рекуррентное соотношение для количества k-сочетаний с повторениями:

$$\left(\!\!\binom{n}{k}\!\!\right) = \left(\!\!\binom{n-1}{k}\!\!\right) + \left(\!\!\binom{n}{k-1}\!\!\right), \qquad n, k = 1, 2, \ldots$$

$$\left(\!\!\binom{n}{1}\!\!\right) = \binom{n}{1} = n; \qquad \left(\!\!\binom{1}{k}\!\!\right) = \binom{k}{k} = 1.$$

5.7. `Упражнение 2.` Доказать комбинаторно следующее тождество:

$$\left(\!\!\binom{n+1}{k}\!\!\right) = \sum_{i=0}^{k} \left(\!\!\binom{n}{k-i}\!\!\right).$$

С его помощью доказать справедливость равенства

$$\binom{n+k}{n+1} = \sum_{i=0}^{k} \left(\!\!\binom{n+k-i-1}{n}\!\!\right).$$

Используя последнее равенство, получить замкнутые выражения для сумм вида

$$\sum_{i=0}^{k} i, \qquad \sum_{i=0}^{k} i^2, \qquad \sum_{i=0}^{k} i^3.$$

3 Урновые схемы. k-перестановки из n элементов.

1. Очень многие задачи элементарной комбинаторики, связанные с подсчетом количества k-сочетаний, могут быть сведены к так называемой урновой схеме.

1.1. В этой схеме имеется урна, в которой находятся n различимых предметов. Спрашивается, сколькими способами вы можете выбрать k из этих n предметов. Ответ зависит от того, возвращаются ли обратно в урну вытаскиваемые предметы или нет. В первом случае один и тот же предмет можно вытащить несколько раз; во втором — только один раз. Следовательно, в первом случае количество способов равно $\left(\!\binom{n}{k}\!\right)$, во втором — $\binom{n}{k}$.

`Пример 1.` В отборочной группе первенства мира по футболу участвуют 6 команд. Продолжить соревнование в следующем круге могут лишь две команды. Очевидно, что количество различных исходов в этой ситуации равно $\binom{6}{2}$.

`Пример 2.` В кондитерском магазине продаются пирожные трех разных видов. Количество способов купить семь пирожных, очевидно, равно $\left(\!\binom{3}{7}\!\right)$.

1.2. Характерной особенностью разобранных выше задач является тот факт, что нас не интересует порядок, в котором предметы вытаскиваются из урны. Однако в некоторых задачах этот порядок важен.

`Пример 3.` В университете проводится шахматный турнир, в котором участвуют 12 человек. По результатам турнира определяется чемпион и вице-чемпион университета по шахматам. Имеется $\left(\!\binom{12}{2}\!\right)$ способов выбрать эту пару победителей из числа участников. Однако в этой задаче существенен порядок внутри этой пары — важно, кто из них занял первое, а кто — только второе место.

2. Урновые схемы, в которых важен порядок вытаскиваемых предметов, связаны с задачами подсчета количества k-перестановок, к анализу которых мы сейчас и перейдем.

2.1. *Определение.* Пусть X — n-элементное множество. *Упорядоченный* набор $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ элементов a_i множества X называется

- k-перестановкой из n элементов;
- k-размещением из n элементов;
- кортежем из k элементов множества X;
- упорядоченной k-выборкой из n элементов;
- k-мерным вектором над множеством X;
- k-элементным словом над n-элементным алфавитом.

Иногда встречаются и другие названия для данного объекта. Мы здесь и далее будем называть этот объект k-перестановкой из n элементов.

Элементы a_i в данном наборе могут как повторяться, так и не повторяться. В первом случае говорят о k-перестановках с повторениями, во втором — о k-перестановках без повторений.

`Пример 1.` Номер паспорта — это типичный пример k-перестановки с повторениями над множеством из десяти цифр $X = \{0, 1, \ldots, 9\}$.

`Пример 2.` Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Перечислим все 2-перестановки без повторений:

$$(x_1, x_2), \quad (x_2, x_1), \quad (x_1, x_3), \quad (x_3, x_1), \quad (x_1, x_4), \quad (x_4, x_1),$$

$$(x_2, x_3), \quad (x_3, x_2), \quad (x_2, x_4), \quad (x_4, x_2), \quad (x_3, x_4), \quad (x_4, x_3).$$

В случае 2-перестановок с повторениями к 12 вышеперечисленным 2-перестановкам добавятся еще 4 2-перестановки вида

$$(x_1, x_1), \quad (x_2, x_2), \quad (x_3, x_3), \quad (x_4, x_4).$$

Вычислим теперь это количество в общем случае.

2.2. **Утверждение 1.** Количество k-перестановок с повторениями из n элементов равно n^k.

Для доказательства можно либо просто сослаться на правило произведения, либо рассмотреть $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, $a_i \in X$ как слово из k элементов над алфавитом из $n = |X|$ букв. На первое место в слове я могу выбрать любую из n букв, на второе — также любую из n букв и так далее. Всего же имеем n^k вариантов записать это слово.

2.3. В качестве важного примера сосчитаем еще раз, на этот раз комбинаторно, количество подмножеств данного множества X. Для этого воспользуемся принципом биекции, а именно, закодируем любое подмножество A n-множества X строкой $f(A)$ длины n из нулей и единиц. Единицу на i-м месте поставим в случае, если элемент $x_i \in A$; в противном случае мы на i-м месте поставим ноль.

`Пример.` Пусть $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $A = \{x_2, x_4\}$. Тогда соответствующая подмножеству A строка длины 4 записывается следующим образом:

$$f(A) = (0, 1, 0, 1).$$

Очевидно, что построенное отображение f взаимно-однозначно. Следовательно, количество подмножеств данного n-множества X совпадает с количеством строк длины n над алфавитом из двух цифр $\{0,1\}$, которое, согласно доказанному выше утверждению 1, равно 2^n.

2.4. **Утверждение 2.** Количество $P(n,k)$ k-перестановок из n элементов без повторений равно

$$P(n,k) = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) =: (n)_k.$$

Доказательство очевидно — на первое место в строке длины k я могу поставить любой из n элементов, на второе — любой из оставшихся $(n-1)$ элементов и так далее.

`Упражнение.` Доказать формально и комбинаторно следующие рекуррентные соотношения для чисел $P(n,k)$:

$$P(n,k) = P(n-1,k) + k\,P(n-1,k-1), \qquad n \leqslant 1, \quad k = 1,\ldots,n;$$

$$P(n,0) = 1, \quad n = 0,1,2,\ldots; \qquad P(n,k) = 0, \quad k > n.$$

2.5. В частном случае $k = n$ k-перестановки из n элементов без повторений называются просто перестановками n-элементного множества X. Их количество $P(n)$, очевидно, равно

$$P_n \equiv P(n) = n!, \qquad P(0) = 0! = 1.$$

2.6. Очевидно, что любая k-перестановка из n элементов без повторений — это просто упорядоченное k-подмножество n-множества. Мы знаем, что количество всех k-подмножеств n-множества равно $\binom{n}{k}$, а количество способов упорядочить k-подмножество равно количеству перестановок этих k элементов, т.е. $k!$. Следовательно, числа $(n)_k$ и $\binom{n}{k}$ связаны соотношением

$$(n)_k = k! \cdot \binom{n}{k} \qquad \Longrightarrow \qquad \binom{n}{k} = \frac{(n)_k}{k!}.$$

Последняя формула часто используется как некомбинаторное определение биномиальных коэффициентов $\binom{n}{k}$ в случае, когда $n \neq \mathbb{N}$, а принадлежит $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ или даже $\mathbb{C}$. Именно, по определению,

$$\binom{q}{k} := \begin{cases} \dfrac{q\,(q-1)\,\ldots\,(q-k+1)}{k\,(k-1)\,\ldots\,1}, & \text{если } k \in \mathbb{Z}, \\ 0, & \text{если } k = 0, \end{cases} \qquad \forall\ q \in \mathbb{C}.$$

Например,

$$\binom{-1}{3} = \frac{(-1)\cdot(-2)\cdot(-3)}{3\cdot 2\cdot 1} = -1.$$