Паросочетания в графах

Домашнее задание №9

10 ноября 2017 г.

Обязательная часть

1. (2 балла). Пусть в двудольном графе $G[X, Y]$ существует X-насыщенное паросочетание. Доказать, что количество рёбер в $G[X, Y]$, которые не принадлежат ни одному X-насыщенному паросочетанию, не превосходит $\binom{|X|}{2}$. Показать, что эта оценка достигается при любом значении $|X|$.

2. (1.5 балла). Предположим, что размер максимального паросочетания в простом двудольном графе G меньше заданного числа k. Известно также, что в таком графе отсутствует звезда, построенная на l ребрах. Получить верхнюю оценку на количество $|E(G)|$ ребер в этом графе через числа k и l.

3. (1 балл). Доказать теорему Холла, используя вершинную теорему Менгера.

4. (1.5 балла). Доказать теорему Холла, используя теорему Кёнига-Эгервари.

5. (1.5 балла). Пусть в двудольном графе $G[X, Y]$ степень любой вершины $x \in X$ больше или равна степени любой вершины $y \in Y$. Доказать, что в $G[X, Y]$ существует X-насыщенное паросочетание.

6. (1.5 балла). В двудольном графе $G[X, Y]$ обозначим через $\mathrm{def(S)}$, $S \subseteq X$, разность между $|S|$ и $|N(S)|$. По определению положим $\mathrm{def}(\varnothing) = 0$. Доказать, что в двудольном графе $G[X, Y]$ существует паросочетание M, состоящее хотя бы из $|X| - d$ ребер, где $d := = \max_{S \subseteq X} \mathrm{def(S)}$.

7. (1.5 балла). Доказать теорему Кёнига-Эгервари с помощью доказанного в предыдущем упражнении утверждения.

8. (2.5 балла). Цепью в частично упорядоченном множестве P называется такое подмножество P_1 множества P, любые два элемента которого сравнимы между собой, а антицепью — подмножество $A \subset P$, любые два элемента которого не сравнимы между собой. С помощью теоремы Кёнига-Эгервари доказать теорему Дилуорса, утверждающую, что в любом конечном частично упорядоченном множестве P минимальное количество k попарно непересекающихся цепей P_i, $i = 1, \ldots, k$, покрывающих все элементы множества P, равно количеству a элементов в максимальной антицепи A.

9. (1.5 балла). Доказать теорему Кёнига-Эгервари с помощью сформулированной в предыдущем упражнении теоремы Дилуорса.