

Задания

6 апреля 2017 г.

1. Докажите, что вложение Йонеды сохраняет пределы.
2. Докажите, что вложение Йонеды сохраняет экспоненты. То есть, если a, b – объекты \mathbf{C} такие, что b^a существует, то $\mathbf{y}(b)^{\mathbf{y}(a)}$ тоже существует и определяется как $\mathbf{y}(b^a)$.
3. Докажите, что функтор $F : \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}} \rightarrow \mathbf{D}$ является левым сопряженным тогда и только тогда, когда он сохраняет копределы.
4. Докажите, что коллекция объектов вида $\mathbf{y}a$ является генератором для категории предпучков.
5. Определите категорию \mathbf{C} , такую что $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}}$ эквивалентна категории рефлексивных графов.
6. Докажите, что любая категория предпучков эквивалентна категории моделей некоторой алгебраической теории.
7. *Представление* функтора $F : \mathbf{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ – это пара (A, α) , состоящая из объекта A и изоморфизма функторов $\alpha : \mathbf{Hom}_{\mathbf{C}}(-, A) \xrightarrow{\sim} F$. Говорят, что функтор F является *представимым*, если существует его представление.

Докажите, что соответствие $X \mapsto \mathbf{Conus}_D(X)$ функториально, и функтор $\mathbf{Conus}_D : \mathbf{C}^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ представим тогда и только тогда, когда в \mathbf{C} существуют пределы формы D .