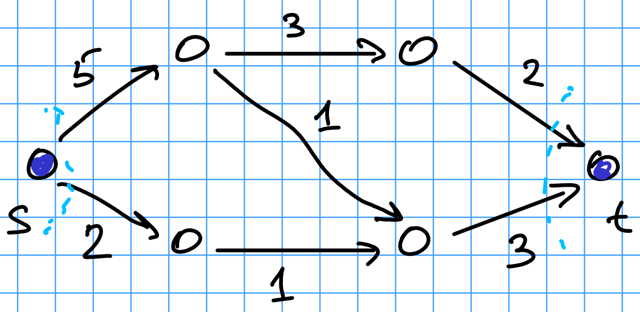
Задача о максимальном потоке



c_{uv} - пропускн. способн. ребра (u,v)

Задача:

≡ Найти $f(u,v)$ - поток

размер потока

1. $f(u,v) \geq 0$ $\qquad |f| = \sum\limits_{(u,t)\in E} f(u,t) = \sum\limits_{(s,t)\in E} f(s,t)$
2. $f(u,v) \leq c_{uv}$
3. $\forall v \in V \setminus \{s,t\}$ $\qquad \sum\limits_{(u,v)\in E} f(u,v) = \sum\limits_{(v,u)\in E} f(v,u)$

Замечание:

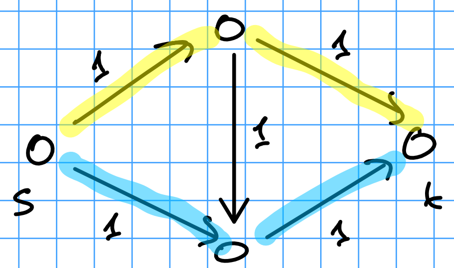
Это задача линейного программирования.

$\forall e \in E \qquad f_e \geq 0, \quad f_e \leq c_e$

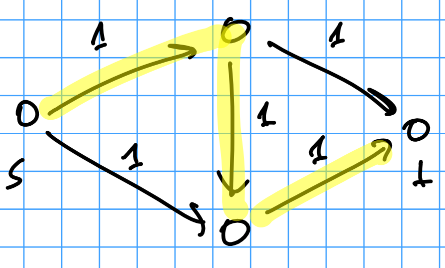
$\forall v \in V \setminus \{s,t\} \qquad \sum\limits_{\to v} f_e = \sum\limits_{\leftarrow v} f_e$

Целевая функция: $\sum\limits_{\to t} f_e \to \max$

Решение "в лоб"

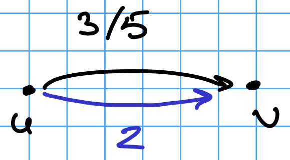


$\Rightarrow \quad |f| = 2$



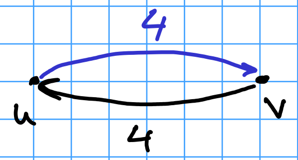
G_f

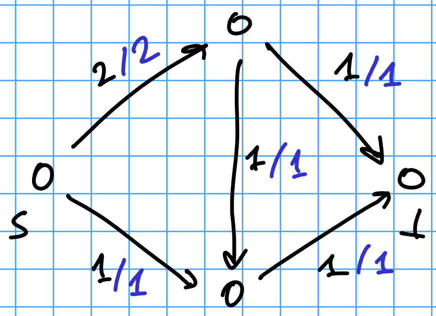
Остаточная сеть

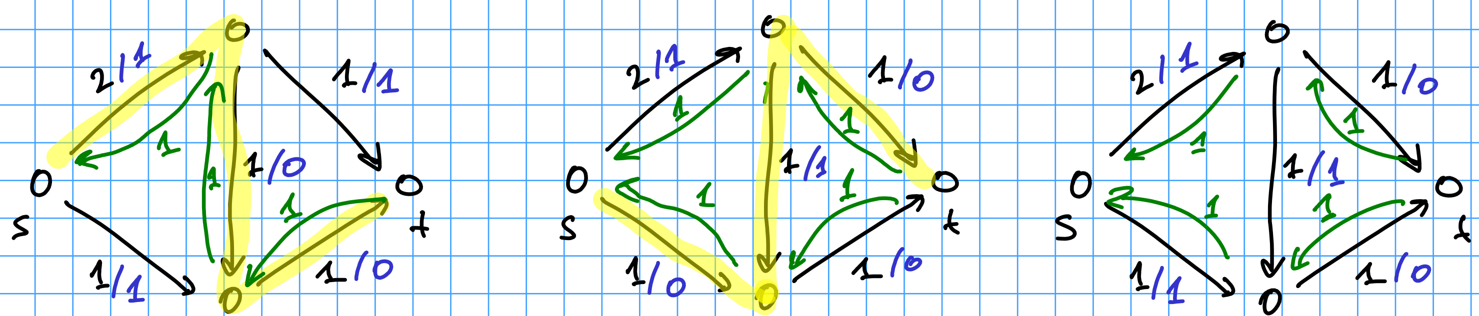


$$\tilde G_f = (V, \tilde E),$$

$$\tilde E = \begin{cases} (u,v)\in E, & f(u,v) < c_{uv}, \quad \tilde c_{uv} = c_{uv} - f(u,v) \\ (v,u)\in E, & f(v,u) > 0, \quad \tilde c_{uv} = f(v,u) \end{cases}$$







$$\forall (u,v)\in E \quad \measuredangle \quad \bar f(u,v) \equiv \tilde f(u,v) - \tilde f(v,u)$$

Утв: $\bar f$ — поток

- $\bar f(u,v) \geq 0$, т.к. $\tilde f(v,u) \leq c_{vu} \leq \tilde f(u,v)$
- $\bar f(u,v) \leq c_{uv}$ т.к. $\tilde f(u,v) \leq c_{uv}$
- Закон Кирхгоффа —‖—

Алгоритм Форда-Фалкерсона

$\forall (u,v)\in E \quad f(u,v) = 0$

Пока есть путь $s \rightsquigarrow t$ в $\tilde G_f$

Находим дополняющий путь в $\tilde G_f$

и пускаем по нему макс. возможн. поток.

Вопрос:

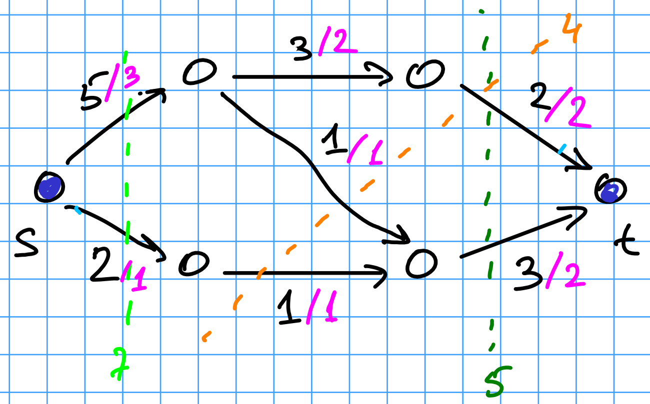
Почему остановится?

Если все $c_{uv} \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ остановится за $O(\sum c_{ut})$ шагов

Теорема Форда - Фалкерсона

Размер максимального потока = размеру минимального разреза

(двойственные задачи)



Разрез $C = (S, T)$

$S \sqcup T = V$

$s \in S, \quad t \in T$

$$|C| = \sum_{\substack{u \in S \\ v \in T}} c_{uv}$$

$$\underset{4}{\max |f|} = \underset{4}{\min |C|}$$

▷ 1. $\max |f| \le \min |C| \le \forall C$

2. $\max |f| = \min |C|$

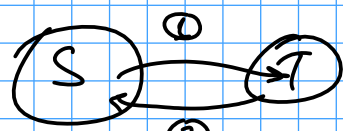
$\angle$ max flow f

В $\tilde{G}_f$ нет пути из s в t

$\angle$ $S = \{$все вершины достиж. из $s\}$

$T = V \setminus S$

$\angle$ $(u, v) \in E$ $\quad u \in S, \ v \in T$



1 Такое ребро насыщено, т.е. $f(u,v) = c_{uv}$

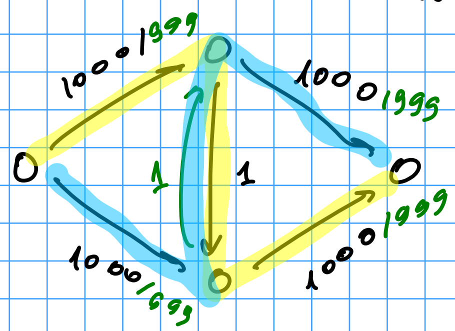
② ◁ $(u,v) \in E$, $\underline{u \in T}$, $v \in S$

Такое ребро не несёт потока, т.е. $f(u,v)=0$

Если бы $f(u,v) > 0 \Rightarrow$ в G_f было бы ребро $(v,u) \Rightarrow$ вершина $\underline{u \in S}$ ▷

Итого:

Фме # ит. время $= O(|f| \cdot (V+E))$



Алгоритм Эдмонса-Карпа - Диница
1972 1970

Схема Форда-Фалкерсона + Поиск в ширину.
(т.е. кратчайший путь)

$$O(\underbrace{VE}_{\text{\# итераций}} \cdot E) = O(VE^2)$$

$D(v)$ – расстояние от s до v в ост. сети.

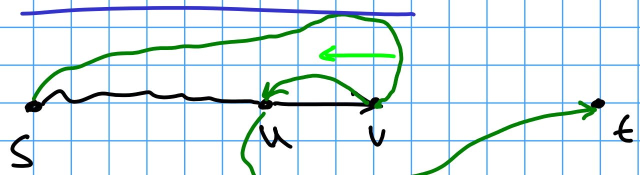
Лемма: $D(v)$ не убывает в алг. Э.-К.

◁ От обратного

$\exists$ $D'(v)$ – расстояние после одного дополнения потока, а $D(v)$ – до.

$\exists$ v – ближайшая к s вершина:

$\underline{D'(v) < D(v)}$ *



$D'(v) = D'(u) + 1$

$$D(v) \geq D'(v) + 1$$

Утв. 1. Ребро $(u,v) \notin \tilde{G}_f$

$$D(v) \leq D(u) + 1 \leq D'(u) + 1 = D'(v)$$ *

$\Rightarrow (v,u) \in \tilde{G}_f$

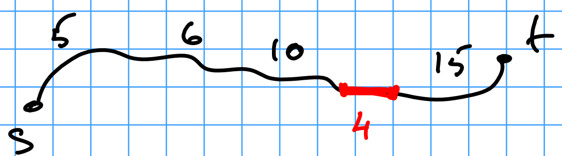
$$D(u) = D(v) + 1$$

$$\underline{D'(v)} = D'(u) + 1 \geq D(u) + 1 = \underline{D(v) + 2}$$

$\Rightarrow$ Предположение неверно $\Rightarrow$ $D(v)$ не убывает.

$\triangleleft$

Критическое ребро на итерации i – это ребро, которое на данной итерации полностью насытилось и следовательно исчезло из $\tilde{G}_f$



$\triangleright$ $(u,v) \in E$

$\exists$ t_1 и t_2 – итерации, на которых (u,v) было критическим.

$\Rightarrow \exists\ t_3 : \quad \underline{t_1 < t_3 < t_2}$

на кот. (v,u) было критическим

$$D_{t_1}(v) = D_{t_1}(u) + 1 \qquad 1$$

$$D_{t_2}(v) \geq D_{t_2}(u) + 1 \qquad 2$$

$$D_{t_3}(u) = D_{t_3}(v) + 1 \qquad 3$$

$$D_{t_2}(v) \overset{②}{=} D_{t_2}(u) + 1 \geq D_{t_3}(u) + 1 \overset{①}{=}$$

$$= D_{t_3}(v) + 2 \geq D_{t_1}(v) + 2$$

При этом $D(v) \leq V$

Для $\forall$ ребра у нас будет не более чем $V/2$ итераций, на которых оно будет критическим

$\Rightarrow \leq E \cdot \frac{V}{2}$ итераций

$\triangleleft$

$$\Rightarrow O(E \cdot V \cdot E) = O(VE^2)$$

Следствие:

Алг. Э.-К. работает для $\mathbb{R}$ пропускных способностей

Задача о максимальном паросочетании