Задания

6 апреля 2018 г.

1. Пусть $\mathbf{C}$ – категория предпорядка, а $\mathbf{D}$ – нет.
   (a) Могут ли $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ быть изоморфны?
   (b) Могут ли $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ быть эквивалентны?
2. Пусть $\mathbf{C}$ – категория с одним объектом, а $\mathbf{D}$ – нет.
   (a) Могут ли $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ быть изоморфны?
   (b) Могут ли $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ быть эквивалентны?
3. Пусть $\mathbf{C}$ – дискретная категория, а $\mathbf{D}$ – нет.
   (a) Могут ли $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ быть изоморфны?
   (b) Могут ли $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ быть эквивалентны?
4. Пусть $\mathbf{C}$ – группоид, а $\mathbf{D}$ – нет.
   (a) Могут ли $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ быть изоморфны?
   (b) Могут ли $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ быть эквивалентны?
5. Докажите, что **Num** эквивалентна **FinSet**. Изоморфны ли эти категории?
6. Докажите, что **Mat** эквивалентна $\mathbf{Mat}^{op}$. Изоморфны ли эти категории?
7. Докажите, что **FinSet** не эквивалентна **Set**.
8. Пусть $F, G : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ – пара функторов. Естественное преобразование $\alpha : F \to G$ называется *естественным изоморфизмом*, если для любого объекта X в $\mathbf{C}$ морфизм $\alpha_X : F(X) \to G(X)$ является изоморфизмом.

   Докажите, что $\alpha : F \to G$ – естественный изоморфизм тогда и только тогда, когда α – изоморфизм в категории $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$.
9. Пусть $\mathbf{C}$ – декартова категория. Докажите, что функтор $- \times 1$ изоморфен тождественному функтору в $\mathbf{C}^{\mathbf{C}}$.

10. Пусть $\rightrightarrows$ – категория, состоящая из двух объектов $\{v, e\}$ и четырех морфизмов $\{id_v : v \to v, id_e : e \to e, d : v \to e, c : v \to e\}$. Докажите, что категории $\mathbf{Graph}$ и $\mathbf{Set}^{\rightrightarrows^{op}}$ эквивалентны. Изоморфны ли эти категории?

11. На второй лекции мы видели, что морфизм групп является мономорфизмом тогда и только тогда, когда мономорфизмом является соответствующая ему функция на множествах. Сейчас мы можем обобщить это утверждение. Забывающий функтор $U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$ является правым сопряженным и строгим. Для любого функтора, удовлетворяющего этим двум условиям, можно доказать аналогичное утверждение.

    Пусть $U : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ – некоторый функтор. Докажите следующие утверждения:

    (a) Если U является правым сопряженным, то он сохраняет мономорфизмы.

    (b) Если U является строгим, то обратное верно, то есть если $U(f)$ – мономорфизм, то f также является мономорфизмом.

12. Докажите, что у забывающего функтора $U : \mathbf{Cat} \to \mathbf{Graph}$, сконструированного в предыдущем ДЗ, существует левый сопряженный.

13. Пусть $\mathbf{rGraph}$ – категорий рефлексивных графов. Объекты этой категории – это графы, в которых для каждой вершины x выбрана петля id_x в этой вершине. Морфизмы – морфизмы графов, сохраняющие тождественные петли.

    Категория графов в данном упражнении не будет работать, но вместо $\mathbf{rGraph}$ можно взять категорию малых группоидов или категорию малых категорий; решение при этом не изменится.

    Докажите, что у функтора $\Gamma : \mathbf{rGraph} \to \mathbf{Set}$, сопоставляющего каждому рефлексивному графу множество его вершин, существует правый сопряженный $C : \mathbf{Set} \to \mathbf{rGraph}$ и левый сопряженный $D : \mathbf{Set} \to \mathbf{rGraph}$, и у D существует левый сопряженный $\Pi_0 : \mathbf{rGraph} \to \mathbf{Set}$. Таким образом, мы получаем следующую цепочку сопряженных функторов:

    $$\Pi_0 \dashv D \dashv \Gamma \dashv C$$

14. Пусть $\mathbf{C}$ – произвольная категория. Если X – объект $\mathbf{C}$, то $\mathbf{C}/X$ – категория объектов над X. Объекты категории $\mathbf{C}/X$ – это морфизмы вида $A \to X$. Морфизмы в $\mathbf{C}/X$ из $f : A \to X$ в $g : B \to X$ – это морфизмы $h : A \to B$ в $\mathbf{C}$, такие что следующий треугольник коммутирует:

    $$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "f"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Тождественные морфизмы и композиция определяются как соответствующие операции в $\mathbf{C}$.

(a) Существует функтор $\Sigma_X : \mathbf{C}/X \to \mathbf{C}$, сопоставляющий объекту $f : A \to X$ в $\mathbf{C}/X$ объект A в $\mathbf{C}$. Докажите, что если в $\mathbf{C}$ существуют бинарные произведения, то у этого функтора существует правый сопряженный.

(b) Пусть $f : X \to Y$ – морфизм в $\mathbf{C}$. Тогда можно определить функтор $\Sigma_f : \mathbf{C}_X \to \mathbf{C}_Y$, сопоставляющий объекту $g : A \to X$ в $\mathbf{C}/X$ объект $f \circ g$ в $\mathbf{C}/Y$. Докажите, что если в $\mathbf{C}$ существуют пулбэки, то у этого функтора существует правый сопряженный.

15. Пусть I – некоторое множество, тогда определим категорию $\mathbf{Fam}_I$ семейств множеств, индексированных I. Объекты категории $\mathbf{Fam}_I$ – это семейства множеств $\{A_i\}_{i \in I}$. Другими словами, объект $\mathbf{Fam}$ – это функция $A : I \to Ob(\mathbf{Set})$, сопоставляющей каждому $i \in I$ некоторое множество A_i.

    Морфизм в $\mathbf{Fam}_I$ из $\{A_i\}_{i \in I}$ в $\{B_i\}_{i \in I}$ – это семейство функций $\{f_i : A_i \to B_i\}_{i \in I}$. Композиции и тождественные морфизмы определяются очевидным образом. Докажите, что категории $\mathbf{Fam}_I$ и $\mathbf{Set}/I$ эквивалентны.

16. Пусть $F : \mathbf{CMon} \to \mathbf{Ab}$ – рефлектор вложения $i : \mathbf{Ab} \to \mathbf{CMon}$.

    (a) Приведите пример конечного нетривиального коммутативного моноида X, такого что $|F(X)| = |X|$.

    (b) Приведите пример конечного коммутативного моноида X, такого что $|F(X)| < |X|$.

    (c) Докажите, что для любого конечного коммутативного моноида X верно $|F(X)| < 2|X|$.

    (d) Приведите пример коммутативного моноида X, такого что $\eta_X : X \to i(F(X))$ – не сюръективна.